BAC 2016

Toutou Mnt Med Mahmoud Med Mewloud.

Session Normale.

Bac 2016 S.N

Ex 1

1) a) 5 et 3 sont premiers donc premières entre eux ou $3 \wedge 5 = 1$ et 1 devise 17 par suite (E) admet des solution de $\mathbb{Z}$

$5 \times 4 - 3 \times 1 = 20 - 3 = 17$

donc $(4, 1)$ est une solution particulière de (E)

b) $5x - 3y = 1$

$\underline{5(x-4) - 3(y-1) = 1}$

$5(x-4) = 3(y-1)$

D'après $5 \mid 3(y-1)$

mais $5 \wedge 3 = 1$

$5 \mid (y-1) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} y - 1 = 5k \\ x - 4 = 3k \end{cases}$

$\begin{cases} y = 1 + 5k \\ x = 4 + 3k \end{cases}$

L'ensemble des solution de (E)

$S \{ 4 + 3k, 1 + 5k \}$

2) (x, y) une solution de (E)

a) Si $x \mid y$ alors il existe $y' \in \mathbb{Z}$ tel que $y = xy'$ et (E) devient

$5x - 3xy' = 17 \Rightarrow x(5 - 3y') = 17$

$\Rightarrow x \mid 17$

b) $m \in \mathbb{Z}$ $\dfrac{1+5m}{4+3m} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \mid y$

$x \mid 17 \Rightarrow x \in \{-17, -1, 1, 17$

$3m + 4 = 17$

$\boxed{3m = 13 \text{ imp}}$

$3m + 4 = -17$

$3m = -21 \Rightarrow \boxed{m = -7}$

$3m + 4 = -1$

$\boxed{3m = -5 \quad \text{imp}}$

$3m + 4 = 1 \Rightarrow 3m - 3$

$\boxed{m = -1}$

Donc les valeurs de m sont $\{-7, -1\}$

Bac 2016 S.N

Ex2

$P(2i) = (2i)^3 - (4+8i)(2i)^2 + (-14+24i)(2i) + 32+4i$

$= -8i + 16 + 32i - 28i - 48 + 32 + 4i$

$= -36i + 36i + 48 - 48 = 0$

$P(2i) = 0$

T.H

	1	$-4-8i$	$-14+24i$	$32+4i$
$2i$	///	$2i$	$12-8i$	$-32-4i$
	1	$-4-6i$	$-2+16i$	0

b) $P(z) = (z-2i)(z^2 - (4+6i)z - 2 + 16i)$

$\Delta' = (2+3i)^2 - (-2+16i)$

$\Delta' = 4 + 12i - 9 + 2 - 16i$

$\Delta' = -3 - 4i = (1-2i)^2$

$z_1 = 2 + 3i + 1 - 2i = 3 + i$ $\boxed{z_1 = 3+i}$

$z_2 = 2 + 3i - 1 + 2i = 1 + 5i$ $\boxed{z_2 = 1+5i}$

$S = \{z_1 = 2i, z_2 = 3+i, z_2 = 1+5i\}$

c) $z_G = \dfrac{5\times 0 - 7\times(2i) + 4(1+5i)}{2}$ $\boxed{z_G = 2+3i}$

2) $Q(z) = z^2 - (4+6i)z - 2 + 16i$

a) Pour $z = x + iy$ on a

$Q(z) = x^2 - y^2 + 2xyi - (4+6i)(x+iy) - 2 + 16i$

$= x^2 - y^2 - 4x + 6y - 2 + (2xy - 6x - 4y + 16)i$

Bac 2016 SON

Suite Ex2

$Q(z) = x^2 - y^2 - 4x + 6y - 2\;(2xy - 6x - 4y + 16)\,i$

$M \in \Gamma \iff Q(z) \in (i\mathbb{R}) \iff Im(Q(z)) = 0$

$\iff x^2 - y^2 - 4x + 6y - 2 = 0$

$\iff (x^2 - 4x) - (y^2 - 6y) - 2 = 0$

$\iff (x-2)^2 - 4 - [(y-3)^2 - 9] - 2 = 0$

$\iff (x-1)^2 - (y-3)^2 - 4 + 9 - 2 = 0$

$\iff (x-2)^2 - (y-3)^2 = -3$

$$\iff -\frac{(x-2)^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{(y-3)^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$$

Γ alors Γ est hyporbole équilitéral

b) de centre $G(1, 3)$ et d'axe focal
d'excientricité est $\sqrt{2}$ et
les sommet $A(1, 3+\sqrt{3})$ et $A'(1, 3-\sqrt{3})$

Bac 2016 S.N

Ex 3

$$\begin{cases} F(x) = x e^{\frac{1}{x}} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) a) $\lim\limits_{x \to 0^-} = x e^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \begin{cases} x \Rightarrow 0 \\ \frac{1}{x} \Rightarrow -\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} = 0 \times 0 = 0$

alors f est continue a gauche car $f(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$ on pose

$t = \frac{1}{x}$ on $x = \frac{1}{t}$

$x \to 0^+ \Rightarrow t \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{t} e^t$

$\lim\limits_{t \to +\infty} = \frac{e^t}{t} = +\infty$

$\boxed{x = 0 \text{ A.V}}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} = e^{\frac{1}{x}} = 0$

alors f est derivable en 0^+

$\lim\limits_{+\infty} (f(x) - (x+1))$

on pose $t = \frac{1}{x} \Rightarrow$ on $x = \frac{1}{t}$

$x \to -\infty$

$t \to 0^-$

$\lim\limits_{t \to 0^-} \frac{1}{t} e^t - \frac{1}{t} - 1$

$\lim\limits_{t \to 0^-} = \frac{e^t - 1}{t} = = 1 = 1 - 1 = 0$

De même $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = 1 = 1 - 1 = 0$

alors $y = x + 1$ A.O au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

c) $f'(x) = 1 \times \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}\right) x$

$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) . e^{\frac{1}{x}}$

$f'(x) = \left(\frac{1 - x}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$

$f'(x) = 0$. $\boxed{x = 1}$

$f(1) = e$

Bac 2016 S·N

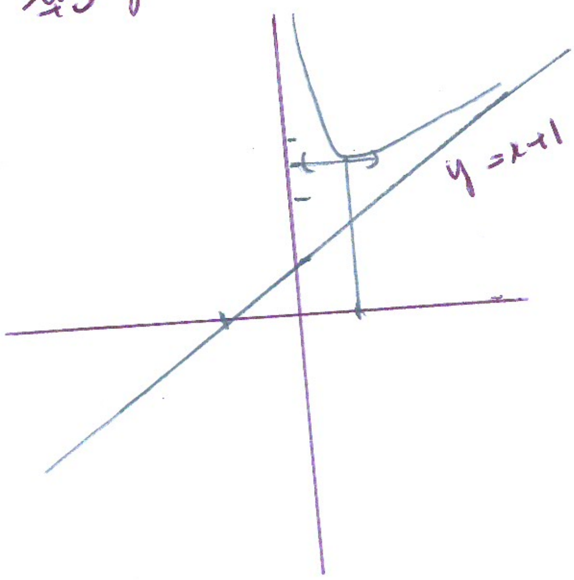
Suite Ex3

T·V

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
	$+$	‖	$-$	0	$+$
	$-\infty \nearrow 0$	‖	$+\infty \searrow e$		$\nearrow +\infty$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty \times 1 = -\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty \times 1 = +\infty$



2) $F_n \begin{cases} F_n(x) = x e^{\frac{n}{x}} \\ F_n(0) = 0 \end{cases}$

a) Soit $h(0,k)$ une homothétie

$\vec{OM'} = k\vec{OM} \iff \vec{OM} = \frac{1}{k}\vec{OM'}$

$M(x,y) \in C$
$\iff M'(x',y') \in h(C)$

$f(x) = y \iff f_n(kx) = ky$

$f_n(kx) = k f(x)$

$\cancel{kx}\, e^{\frac{n}{kx}} = \cancel{kx}\, e^{\frac{1}{x}}$

$\boxed{k = n}$ donc $C(n)$ est l'image de (C) par l'homothétie de centre O et de rapport n

b) La tangente est horizontale pour $f'_n(x) = 0$

$f_n(x)' = e^{\frac{n}{x}} - \left(\frac{n}{x^2} e^{\frac{n}{x}}\right) x$

$f_n(x)' = e^{\frac{n}{x}}\left(1 - \frac{n}{x}\right)$
$= e^{\frac{n}{x}}\left(\frac{n-x}{x}\right)$

$f_n(x') = 0 \iff n - x = 0$
$\boxed{x = n}$

$f_n(x) = n e^{\frac{n}{n}} = ne$

$\boxed{y = ne}$

$M_n(n, ne)$ ce points sont sur la droite
$\boxed{\Delta : y = xe}$

Bac 2016 S.N (6)

suite Ex3

2) $\begin{cases} F_n(x) = x\, e^{\frac{n}{x}} \\ F_n(0) = 0 \end{cases}$

c) T.V

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$ 0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0 $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$2e$	$\nearrow$	$+\infty$

Bac 2016 S.N Ex 4

$F(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$

1) a)

$\lim\limits_{x \to -1^+} = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to -1^+} = -\infty + \infty$ FI

on pose $t = x+1 \Rightarrow x = t-1$

$\lim\limits_{x \to -1^+} t = \lim\limits_{x \to -1^+} x+1 = 0^+$

$\lim\limits_{t} = \frac{t \ln t - t + 1}{t} = \boxed{\frac{1}{t} = +\infty}$

$\boxed{x = -1 \text{ A.V}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) - \frac{x}{x(\frac{1}{x}+1)}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} = \ln(x+1) - \frac{1}{\frac{1}{x}+1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} = \ln(x+1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} = -1 + \infty = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} = \frac{\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}}{x}$

$\lim\limits_{+\infty} = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x} - \frac{1}{x+1}$

Don $\boxed{\lim\limits_{+\infty} = 0}$ alors BP (Ox)

b) $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad f(0) = 0$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c) $f''(x) = \frac{(x+1)^2 - 2(x+1)x}{(x+1)^4}$

$f''(x) = \frac{x+1-2x}{(x+1)^3}$

$f''(x) = \frac{1-x}{(x+1)^3}$

$f''(x) = 0 \quad 1 - x \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$

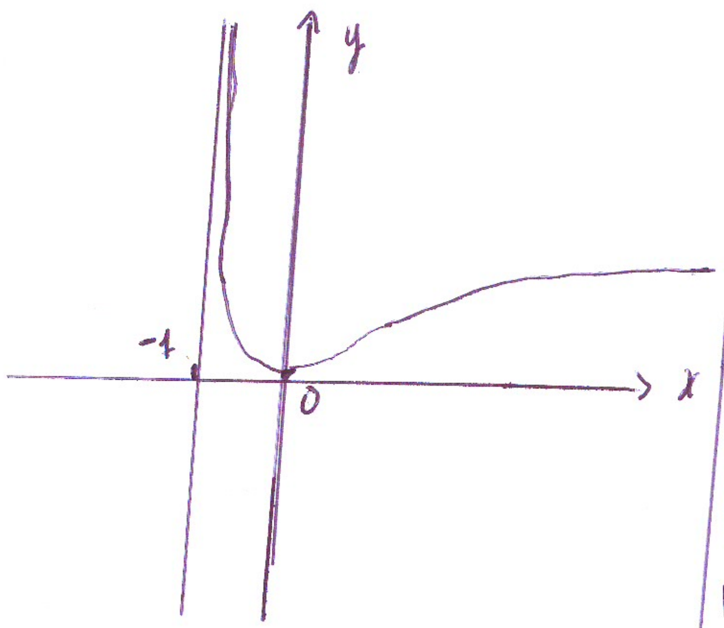
$f(1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$

f'' s'annule en 1 et change de signe donc $A(1, -\frac{1}{2} + \ln 2)$ est un point d'inflexion

Bac 2016 SoN

Suite ExII

1) d) Tracer la courbe



2) a) on pose $\int_0^x \ln(1+t)\,dt$

$$\begin{cases} u(t) = \ln(1+t) \\ v'(t) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{1+t} \\ v(t) = t+1 \end{cases}$$

$J(x) = [\ln(1+t)(1+t)]_0^x - \int_0^x dt$

$J(x) = [\ln(1+t)(1+t)]_0^x - [t]_0^x$

$J(x) = (\ln(1+x)(1+x) - x)$

$$\boxed{\int_0^x \ln(1+t)\,dt = \ln(1+x)(1+x) - x}$$

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt =$

$\int_0^x \ln(t+1) - \int_0^x \frac{t-1+1}{t+1}$

$= J - \int_0^x 1 - \frac{1}{t+1}\,dt$

$= J - [t - \ln(1+t)]_0^x$

$= J - x + \ln(1+x)$

$= \ln(1+x)(1+x) - x - x + \ln(1+x)$

$$\boxed{F(x) = \ln(1+x)(2+x) - 2x}$$

b) $A_n \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$

$A_n = [F(x)]_0^{\frac{1}{n}}$

$A_n = \ln(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) - \frac{2}{n}$

$$\boxed{A_n = \frac{1+2n}{n}\ln\left(\frac{1+n}{n}\right) - \frac{2}{n}}$$