# CORRIGÉE

# BAC

# 2011

Khadijetou Isselkou

BAC 2011
S.N

1.a) Calcul de $P(1)$:

$P(1) = 1^2 - (1+2\cos\theta)\times 1^2 +$
$(1+2\cos\theta)\times 1 - 1.$

$= 1 - 1 - 2\cos\theta + 1 + 2\cos\theta - 1$

$= 0$

$\Leftrightarrow P(1) = 0$

Resoudre $P(z) = 0$

| | $1$ | $-1-2\cos\theta$ | $1+2\cos\theta$ | $-1$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | | $1$ | $-2\cos\theta$ | $1$ |
| | $1$ | $-2\cos\theta$ | $1$ | $0$ |

Alors pour tout nombre complexe $z$ on a: $P(z) = (z-1)(z^2 - 2\cos\theta\, z + 1)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 - 2\cos\theta\, z + 1) = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = -(1-\cos^2\theta) = (i\sin\theta)^2$

$d = i\sin\theta$

$z' = \dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{1} = \cos\theta + i\sin\theta$

$z'' = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{1} = \cos\theta - i\sin\theta$

$S = \{1; \cos\theta + i\sin\theta; \cos\theta - i\sin\theta\}$

2)

$M_1(x_{M_1}; y_{M_1}) \Rightarrow \begin{cases} x_{M_1} = \cos\theta \\ y_{M_1} = \sin\theta \end{cases} \Rightarrow$

$x_{M_1}^2 + y_{M_1}^2 = 1$

$\theta \in [0; 2\pi]$.

$\Rightarrow M_1$ Décrit le cercle de centre O et de rayon 1.

Autrement:

$OM_1 = |z_1 - 0| = |e^{i\theta}|$ ; $\theta \in ]0;2\pi$

Donc $M_1$ décrit le cercle de centre O et de rayon 1.

De même pour $M_2$ ; $M_2$ décrit le cercle de centre O et de rayon 1.

3)

$G = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} N_0 & M_1 & M_2 \\ \hline 1 & 1 & -3 \end{array}$

a) Le lieu géométrique du point G.

Calculons $z_G$ l'affixe du point G.

$z_G = \dfrac{1\times z_0 + 1\times z_1 - 3z_2}{1+1-3}$

$\boxed{z_G = -1 + 2\cos\theta - 4i\sin\theta}$

$\begin{cases} x = -1 + 2\cos\theta \\ y = -4\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x+1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$ $\theta \in [0;2\pi$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{-y}{4}\right) = 1$

⇒ Alors le lieu géométrique $\Gamma$ de G est l'ellipse d'équation $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

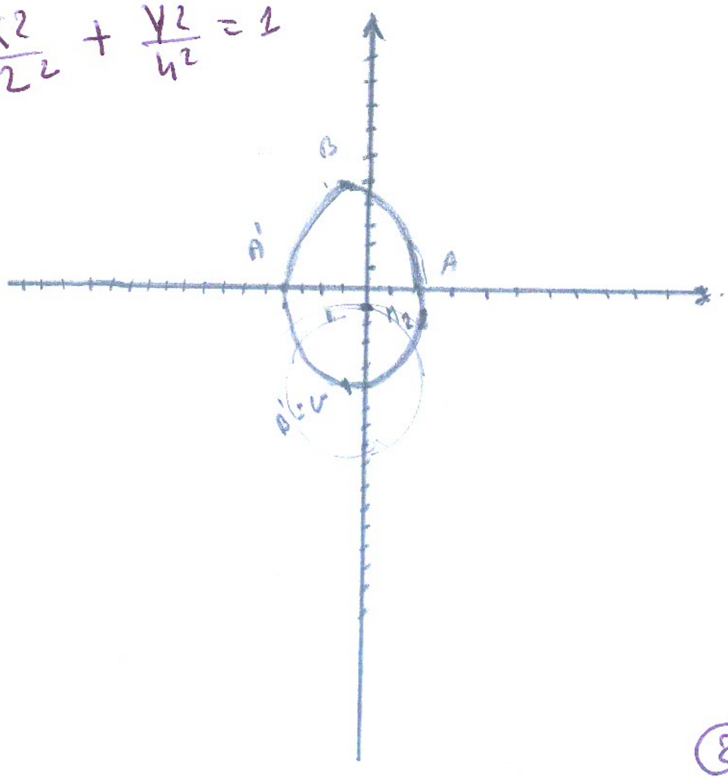
b) Soient $(x;y)$ les coordonnées de G dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ et considérons le point $\omega(-1;0)$ alors dans le repère les coordonnée $(X;Y)$ de G vérifient $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{16} = 1$

Car :

$$\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y \end{cases}$$

Alors le lieu géométrique $\Gamma$ de G est l'ellipse dont l'équation réduite dans le repère $(\omega;\vec{u};\vec{v})$

$$\frac{X^2}{2^2} + \frac{Y^2}{4^2} = 1$$




* Comme $b = 4 > 2 = a$ alors les éléments caractéristiques (dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ sont :
  - le Centre $\omega(-1;0)$
  - les sommets

les sommets sont $A(2;0)$, $A'(-2;0)$ $B(0;4)$ et $B'(0;-4)$.

or : $\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y \end{cases}$

* Donc dans le reper les sommet sont : $A(1;0)$ ; $A'(-3;0)$ $B(-1;4)$ et $B'(-1;-$
  - $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - 2^2}$ $= 2\sqrt{3}$
  - l'excentricité $e = \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

* 4) a) Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ on a

$M_0 = (1;0)$ $M_1(0;1$ $M_2(0;-1)$ $G(-1;-$ on constate que ( est un sommet de $\Gamma$.

b) $\mathcal{S}'$ est l'ensemble des points M tels que
$MM_0^2 + MM_1^2 - 3MM_2^2 = 6$.
On remarque que : $M_2 \in \mathcal{S}'$ ;
d'où $\mathcal{S}'$ est le cercle de centre G passant par $M_2$.

## Exercice 2.

1. a) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x - x\ln x)$
$= 0 = f(0)$
D'où la continuité de f en 0.

• $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(1-\ln x)}{x}$

$= \lim_{x\to 0^+}(1-\ln x) = +\infty.$

Donc f n'est pas dérivable en 0 et la courbe de f admet une demi-tagte verticale à droite de 0.

b) Dérivée et sens de variation de f :

$f'(x) = 1 - \ln x = -\ln x.$

$f'(x) \leq 0 \; ; \forall x \in [1;+\infty[$ et

$f'(x) \geq 0 \; ;$ si $x \in ]0;1]$

• Limites aux bornes :

$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0} x(1-\ln x) = +\infty$

Tableau de variation :

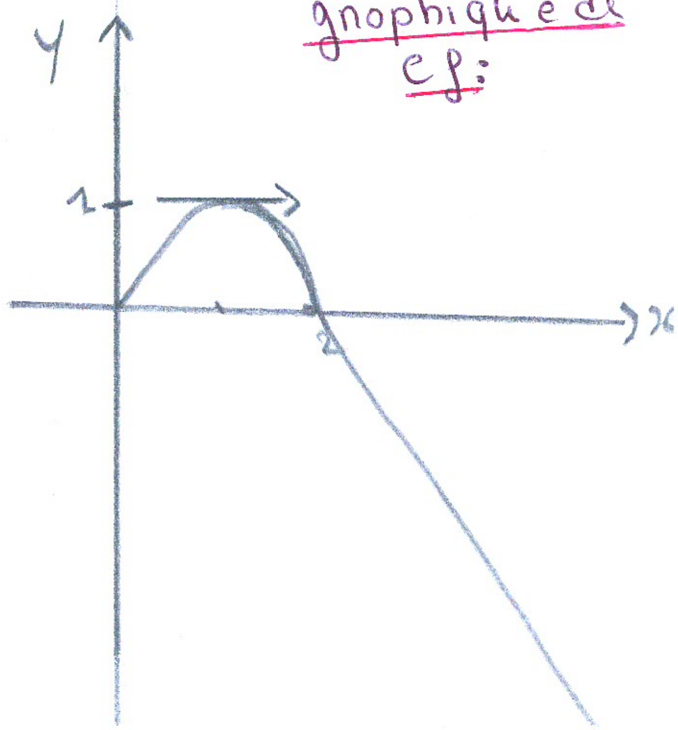
| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ |

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1-\ln x)}{x}$

$= \lim_{x\to+\infty} 1 - \ln x = -\infty$

Donc $C_f$ admet une branche parabolique de direction (oy).

• Représentation graphique de $C_f$ :




2. a) Pour tout $n > 1$

$\begin{cases} f_n(x) = x^n(1-\ln x) \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x-0} =$

$\lim_{x\to 0} x^{n-1} - x^{n-1}\ln x = 0$

$f_n$ est dérivable en 0 et $C_{f_n}$ admet une demi tgte horizontale en 0.

2) • Limites aux bornes

$\lim_{x\to 0^-} f_n(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^n - x^n \ln x) = 0$

$\lim_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$

• Derivee et sens de variation de $f$:

$f_n'(x) = nx^{n-1}(1-\ln x) - \frac{1}{x}x^n$

$= x^{n-1}(n - \ln x - 1).$

Soit $f_n'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = e^{\frac{n-1}{x}}$.

| $x$ | $0$ | | $e^{\frac{n-1}{n}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{e^{n-1}}{n}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

3. a) on pose $f_{n+1}(x) = f_n(x)$

$\Rightarrow x^n(1-\ln x)(x-1) = 0 \Rightarrow$

$x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = e$

D'où toute les courbes $(C_n)$ passent par les trois points $(0;0)$ ; $(1;1)$ et $(e;0)$

D'après la 3. a) on a le Tableau suivant qui donne la position cherchée :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $C_n$ par rapport à $C_{n+1}$ | | $\frac{C_n}{C_{n+1}}$ | | $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ | | $\frac{C_n}{C_{n+1}}$ | |

4. a) $U_n$ est l'aire du domaine limité par $(C_n)$ l'axe des obscisses et les droites d'equation

$x = \frac{1}{e}$ ; $x = 1$

b) Comme $f_n(x) > 0$ sur $[0; \frac{1}{e}] \Rightarrow (U_n) \geq 0$

de plus

$U_{n+1} - U_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f_{n+1}(x)dx - \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx.$

$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} f_{n+1}(x) - f_n(x)\,dx$

d'après 3. b) d'où $(U_n)$ est décroissante

c) on a :

$U_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} x^n(1-\ln x)$

on pose :

$\begin{cases} u(x) = 1 \Rightarrow u'(x) = -\frac{1}{x} \\ v'(x) = x^n \Rightarrow v(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} \end{cases}$

$= \dfrac{(e^x+e^{-x})^2-4}{(e^x+e^{-x})^2} \Rightarrow$

c) $1-f'(x) = \dfrac{e^{2x}+2e^{-2x}-4}{(e^x+e^{-x})^2}$

$= \left[\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right]^2 = (f(x))^2$

$u_{n+2}-u_n = \int_0^{\ln 3} f(t)^{n+2} - f(t)^n dt$

$= \int_0^{\ln 3} (f(t))^n - 1 dt \Rightarrow$

$u_{n+2}-u_n = -\int_0^{\ln 3} f'(t)(f^n(t))dt$

$= -\dfrac{1}{n+1}\left[f^{n+1}(t)\right]_0^{\ln 3}$.

$u_{n+1}-u_n = -\int_0^{\ln 3} f'(t)f^n(t)dt$

$= -\dfrac{1}{n+1}\left[f^{n+1}(t)\right]_0^{\ln 3}$

$= \dfrac{-1}{n+1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}$.

d) on a $u_{n+2}-u_n$

$= -\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}$ d'où

$u_{2n}-u_{2n+2} = \dfrac{-1}{2n-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2n-1}$

$u_{2n+2}-u_{2n-4} = \dfrac{-1}{2n-3}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2n-3}$

$u_4-u_2 = -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{5}\right)^3$

$u_2-u_0 = -\dfrac{1}{1}\left(\dfrac{4}{5}\right)$

$u_{2n}-u_0 = -\sum_{p=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2p-1}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2p-1} \Rightarrow$

$u_{2n+1}-u_{2n-1} = -\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{4}{5}\right.$

$u_3-u_1 = \dfrac{-1}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^2$

$u_{2n+1} = \ln\dfrac{5}{3} - \sum_{p=1}^{n}\dfrac{1}{2p}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2p}$

e) on a $S_n = \dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{5}\right.$

$+ \dots + \dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{4}{5}\right)^2$

on $S_1 = \sum_{p=1}^{n}\dfrac{1}{2p-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2p-1}$

de même $S_2 \sum_{p=1}^{n}\dfrac{1}{2p}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2n}$

Donc $S_n = S_1+S_2 = \ln 3 -$

$u_{2n} + \ln\dfrac{5}{3} - u_{2n+1} =$

$S_n = \ln 5 - u_{2n} - u_{2n+1} \Rightarrow$

$\lim_{+\infty} S_n = \ln 5$ ; la

$\lim_{+\infty} u_{2n} = 0$ et

$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$

fin ...

. Exercice 3:

$\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = -1$

$y=-1$ est (AH).

$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}(1-e^{2x})}{e^{x}(1-e^{-2x})} = 1$

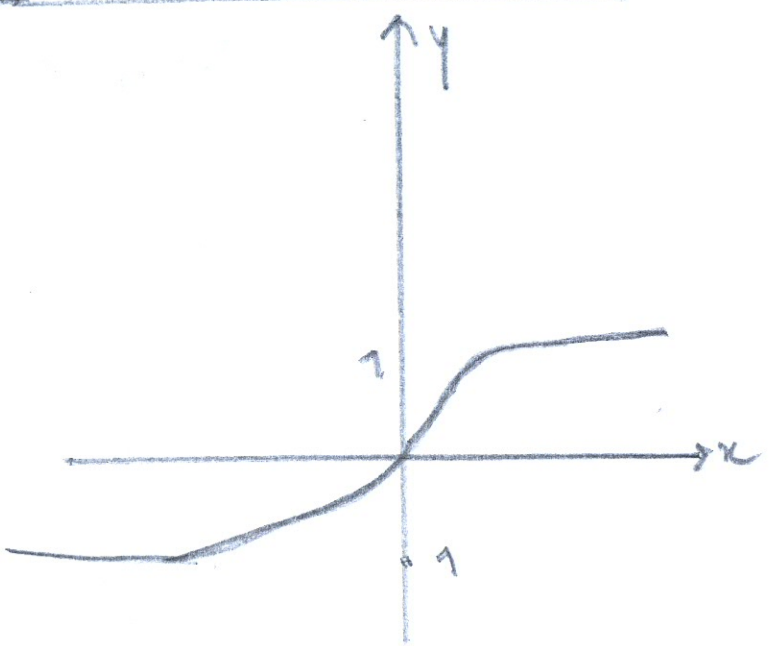
$\Rightarrow y = 1$ est (A.H).

b) $\forall x \in D_f$ $x \in D_f$ ; $f(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}$

$= -f(x) \Rightarrow f$ est impaire.

• Dérivée et sens de variation :

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-1 \nearrow 1$ |




d) Calcul d'aire A :

$A = \int_0^{\ln 3} f(x)\,dx$

$= \int_0^{\ln 3} \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$ . u.a

$= \left[\ln(e^{x}+e^{-x})\right]_0^{\ln 3} =$

$\ln\left(3+\frac{1}{3}\right) - \ln 2 = \ln\frac{5}{3}$.

2. a) $u_1 = \int_0^{\ln 3} f(t)\,dt$

$= A = \ln\frac{5}{3}$.

b) on a : $t \in [0 ; \ln 3]$
$\Leftrightarrow 0 \leq t \leq \ln 3$ en plus
$f$ est croissante sur
$[0;\ln 3]$ ; alors $f(0) \leq f(t)$
$\leq f(\ln 3)$.

d'où $0 \leq u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$\ln 3$ ; donc
$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

c) $1 - f'(x) = 1 - \frac{4}{(e^{x}+e^{-x})}$