Bac 2014

S. C

Ex 03

Bac 2014 (C)

EX03 — Fatimetou

1) $\forall x \in]0;+\infty[$ $g(x) = -x^3 - \ln x$

a) $\lim\limits_{0^+} g(x) = \lim\limits_{0^+} (-x^3 - \ln x) = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{+\infty} g(x) = \lim\limits_{+\infty} = (-x^3 - \ln x) = \boxed{-\infty}$

$g'(x) = -2x - 1/x < 0$; $\forall x \in]0;+\infty[$

T.V de g.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow -\infty$

Comme est continue et strictement monotone sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et comme elle change le signe l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$ et comme $g(1/e) = -1/e^2 + 1 = \frac{e^2 - 1}{2e} > 0$ et $g(1) = -1 < 0$ donc $1/e < \alpha < 1$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

2) $\forall x \in]0;+\infty[$; $f(x) =$

$-x + 1 + 1/x(1 + \ln x)$

a) $\lim f(x) = \lim (-x + 1 + \overset{+\infty}{1/x} \overset{-\infty}{(1 + \ln x)}$

$\boxed{\lim\limits_{0^+} = -\infty}$

$x = 0$; A.V à Cf =

b) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = -1(1 - x) = \lim(1/x + \frac{\ln x}{x})$
$= \boxed{0}$

$y = 1$. A.O à Cf au voisinage de $+\infty$

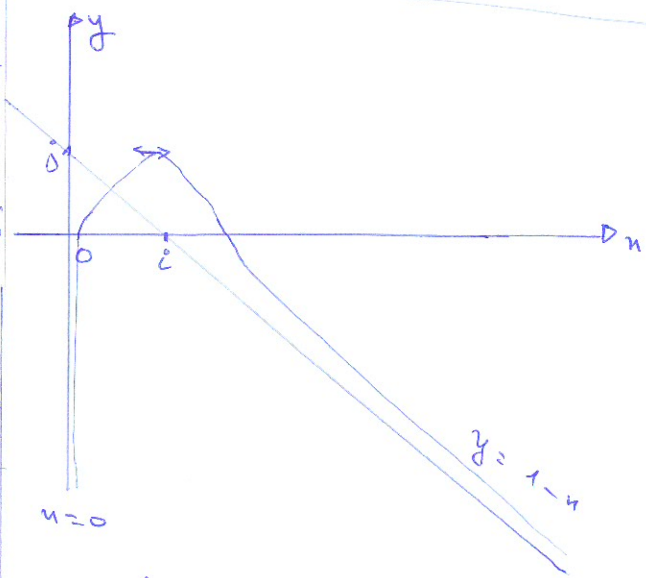
c) $f'(x) = -1 + \frac{1/x \cdot x - (1 - \ln x)}{x^2}$

$\frac{1 + 1 - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{-1 - \ln x}{x^2}$

$\frac{-x^2 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

2-c) T.V de f.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$



3-1) $\lim\limits_{0^+} f(m) = \lim\limits_{0^+} (-x + 1 + \frac{m^2}{1}(1 + \ln x - \ln x$

Et $\lim\limits_{+\infty} f_m(x) = -(1+1)$; $\lim\limits_{+\infty} \frac{m^2}{x}(1 + \ln x - \ln m$

$\lim\limits_{+\infty} m^2(1/x + \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln x}{m}) = 0$

toutes les courbes (Cm) admetent donc les mêmes asymptotes

$x=0$ et $y=1-x$ et qui se comport en $G(0;1)$

2) une homothétie de centre G et de rapports se transforme $\mathcal{E}_1$ en $\mathcal{E}_m$

$(x,y) \in \mathcal{E}_1$ ~~et~~ $\Rightarrow (h(M) = M'(x',y') \in \mathcal{E}_m$ c'est à dire :

$f_1(x) = y \Rightarrow f_m(x') = y'$

or $h(M) = M' \Leftrightarrow \vec{GP_1} = k\vec{GH}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky - k + 1 \end{cases}$

D'où on doit avoir

$f_1(x) = y \Rightarrow f_m(kx) = ky + 1 - k$

C'est à dire :

$f(kx) = k f_1(x) - k + 1$

c'est à dire :

$-kx + 1 \quad \frac{m^2}{kx}(1 + \ln(kx - \ln m)$

$-kx + k + k/x(1 + \ln x) - k + 1$

C'est à dire :

$\frac{m^2}{kx}(1 + x - \ln k + \ln m) = k/x(1 + \ln x)$

D'où par identification :

$\begin{cases} k^2 = m^2 \\ \text{et} \\ \ln k = \ln m \end{cases}$ donc $\boxed{k = m}$

$\mathcal{E}_m$ est donc l'image de $\mathcal{E}_1$ par l'homothétie h_m de centre G et de raport m.

c) T.V de f_m :

x	0		$m\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f_m(m\alpha)$	↘	$-\infty$