S.V
Ex ①

Bac 2011

Vayga IM / Mounah.

Correction du Bac : 2015 SN

Ex : (1).

$p(z) = z^3 - (11+6i)z^2 + (28+38i)z - 12 - 60i$

a)- Calcul $p(3)$

$p(3) = 3^3 - 9(11+6i) + 3(28+38i) - 12 - 60i$

$p(3) = 27 - 99 - 54i + 84 + 114i - 12 - 60i$

$p(3) = 0.$

	1	$-11-6i$	$28+38i$	$-12-60i$
3		3	$-24-18i$	$12+60i$
	1	$-8-6i$	$4+20i$	0

$(z-3)(z^2+(-8-6i)z + 4 + 20i)$

$a = -8-6i$

$b = 4+20i$

$p(z) = 0$

$z = 3$

$z^2 + (8-6i)z + 4 + 20i = 0$

$\Delta = (8-6i)^2 - 4(4+20i)$

$\Delta = 64 + 96i - 36 - 16 - 80i$

$\Delta = 12 + 16i$

$\begin{cases} a^2+b^2 = 20 \ (1) \\ a^2-b^2 = 12 \ (2) \\ 2ab = 16 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 20 \\ a^2-b^2 = 12 \\ ab = 8 \end{cases}$

$(1)+(2) \Rightarrow a^2+a^2 = 32$

$a^2 = 16$ $\quad x = 4$ ou -4.

$1-(2) \Rightarrow 2b^2 = 20-12 \Rightarrow b^2 = 4$

$y = 2$ ou -2.

$\delta = (4+2i)^2$

$z_1 = \dfrac{8+6i+4+2i}{2} = 6+4i$

$z_2 = \dfrac{8+6i-4-2i}{2} = 2+2i$

Conclusion ; l'ensemble de solution de l'équation $p(z)=0$ est $S\{3,\ 6+4i\ ;\ 2+2i\}$

(c)- les pts A, B et C sont les images des solutions de l'équation $p(z)=0$ avec $Im(z_A) < Im(z_B) < Im\, z_C$

Donc $z_A = 3$; $z_B = 2+2i$ et $z_C = 6+4i$

$G = bar \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 2 & -2 & 2 \end{array}$ G est alors le quatrième sommet du quadrilatère. L'affixe de G est

$z_G = \dfrac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2-2+2}$

$z_G = \dfrac{2\times 3 - 2(2+2i) + 2(6+4i)}{2}$

$z_G = \dfrac{6 - 4 - 4i + 12 + 8i}{2} = 7+2i$

$z_G = 7+2i$

2-b) $\overrightarrow{MM'} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

avec $2-2+3-k \neq 0$.

$\Rightarrow$ Il s'agit d'un unique

$\Omega_k = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 2 & -2 & 3-k \end{array}$

$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MM'} = (3-k)\overrightarrow{M\Omega_k}$

$\overrightarrow{M\Omega_k} + \overrightarrow{\Omega M'} = (3-k)\overrightarrow{M\Omega_k}$

$\overrightarrow{\Omega M'} = (2-k)\overrightarrow{M\Omega_k}$

donc il s'agit $h_{(\Omega_k ; 2-k)}$

c) $\Omega_k = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 2 & -2 & 3-k \end{array}$

$\overrightarrow{C\Omega_k} = \frac{2}{3-k}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3-k}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{C\Omega_k} = \frac{2}{3-k}\overrightarrow{BA}$

$C\Omega_k \, , \, d(C, \overrightarrow{BA})$.

or $\frac{2}{3-k} \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{C\Omega_k} \neq 0$.

$\Rightarrow \Omega_k \neq 0$.

$k \neq 2$, $\Omega_k \neq \Omega_2$

$= \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 2 & -2 & 1 \end{array}$

Il s'agit de $d(C; BA) \setminus \{C, \Omega_2\}$

$\Omega_1 = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 2 & -2 & 2 \end{array} = G$.

d) $R = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$

$\overrightarrow{MR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MM'}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}(2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})$

$\overrightarrow{MR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MA}$

$\overrightarrow{MR} = (\frac{1}{3} + \frac{2}{3})\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

R est le pt fixe vérifiant

$\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$\mathcal{E}(M) = 2MA^2 - 2MB^2 + 2MC^2$.

$\Gamma_m = \Gamma_m \,/\, \varphi(M) = m \in \mathbb{R}$,

$\varphi(M) = 2MG^2 + \mathcal{E}(G)$

or $G = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 2 & -2 & 2 \end{array}$

$\mathcal{E}(G) = 2GA^2 - 2GB^2 + 2GC^2$.

$GA^2 = |z_G - z_A|^2 = |7+2i-3|^2 = |4+2i|^2$

$GA^2 = 20$.

$GB^2 = |z_B - z_G|^2 = |2+2i-7-2i|^2$

$GB^2 = |5|^2 = 25$.

$GC^2 = |z_C - z_G|^2 = |6+4i-7-2i|^2$

$GC^2 = |-1+2i|^2 = 5$.

$\mathcal{E}(G) = 2 \times 20 - 2 \times 25 + 2 \times 5$.

$\mathcal{E}(G) = 40 - 50 + 10 = 0$

$\mathcal{E}(M) = 2MG^2$

2_a) - L'application f_K est une Translation si et selement si le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est constant

- La fonction vectorielle de leibniz $M \to \ldots$
($M \mapsto 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-K)\overrightarrow{MC}$) est constante si et selement si les pts du système $A(2)$ $B(-2)$ $C(3-K)$ est nul
c'est qui equivaut a
$3 - K = 0 \Rightarrow \boxed{K = 3}$
Alors f_K est une Translation ssi $K = 3$ on obtient son vecteur en ramplaçant M dans l'expression vectorielle
$\vec{V} = 2\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BA}$.

b) Si $K \neq 3$ le pts du système $\{A(2), B(-2)\ C(3-K)\}$ est non nul
D'onc ce système admet un barycentre G_K et on a pour tout pt M du plan
$2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-K)\overrightarrow{MC} = \ldots = (3-K)\overrightarrow{MG_K}$
$f_K(M) = M'$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG_K} + \overrightarrow{G_KM'} = (3-K)\overrightarrow{MG_K}$
$\Rightarrow \overrightarrow{G_KM'} = (2-K)\overrightarrow{MG_K}$
Particulièrement pour $K = 2$ on a $f_2(M) = M'$
$\overrightarrow{G_2M'} = \vec{0} \Leftrightarrow M' = G_2$ donc

donc l'application f_2 est constante
G_2 est le barycentre du système $A(2, B(-2), C(1)$ Alors
$\overrightarrow{CG_2} = 2\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BA}$.

Donc $\overrightarrow{CG_2} = 2\overrightarrow{CG}$ alors G_2 est le symetrique de C par rapport a G.
Maintenant, si $K \in \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$ et M un pt invarient par f_K alors $f_K(M) = M$
$\Rightarrow \overrightarrow{G_KM} = (K-2)\overrightarrow{G_KM} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_KM} = \vec{0} \Leftrightarrow M =$
D'on f_K admet un unique pts.
f_K est l'homothetie de centre Ω_K et de rapport $\boxed{K = -2}$

c) On a $\Omega_K = G_K = \text{bar}\{A:2)\ B(-2)\ C(3$
donc $2\overrightarrow{\Omega_KA} - 2\overrightarrow{\Omega_KB} + (3-K)\overrightarrow{\Omega_KC} = \vec{0}$
$2\overrightarrow{BA} + (3-K)\overrightarrow{\Omega_KC} = \vec{0}$.
$\overrightarrow{\Omega_KC} = \frac{2}{3-K}\overrightarrow{AB}$.
Alors Ω_K est situe sur la dte passant par et parallele a (AB).
Comme $\frac{2}{3-K} \neq \vec{0}$
Alors Ω_K est situé sur la dte passan par C et parallele à (AB) comme
$\frac{2}{3-K} \neq 0$ et $\overrightarrow{AB} \neq 0$. on a: $\overrightarrow{\Omega_KC} \neq 0$
donc $\Omega_K \neq C$. Comme $K \neq 2$ on $\overrightarrow{\Omega_KC} \neq 2$
donc $\Omega_K \neq G_2$ ou G_2 le pt tq $\overrightarrow{G_2C} = 2\overrightarrow{AB}$: G est

. G_2 est le symétrique de C par rapport à G, c'est aussi le quatrième sommet du parallélogramme $ABGG_2$.

Conclusion : le lieu géométrique des pts R_k lorsque k décrit $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$ est la droite passant par et // à (AB) / $\{C, G_2\}$.

d- Le centre de gravité R du tgle AMM' est le barycentre du système $[(A,1),(M;1);(M';1)]$ Alors pour tout pt M du plan on a : pour $k=1$.

$3\vec{MR} = \vec{MA} + \vec{MM} + \vec{MM'}$

$= \vec{MA} + (2\vec{MA} - 2\vec{MB} + 2\vec{MC})$

$3\vec{MR} = 3\vec{MA} + 2\vec{BC}$

D'où $3\vec{MR} - 3\vec{MA} = 2\vec{BC}$

$3\vec{AR} = 2\vec{BC}$.

Enfin. $\vec{AR} = \frac{2}{3}\vec{BC}$.

D'où le centre de gravité R du Tgle. AMM' est un pt fixe indépendant de la position de M. le lieu géométrique de R est un pt fixe.

On peut aussi remarqué que pour $k=1$, la Transformation f_k est l'homothétie de centre $R_1 = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 2 & -2 & 2 \end{array}$

$R_1 = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 2 & -2 & 2 \end{array} = G.$

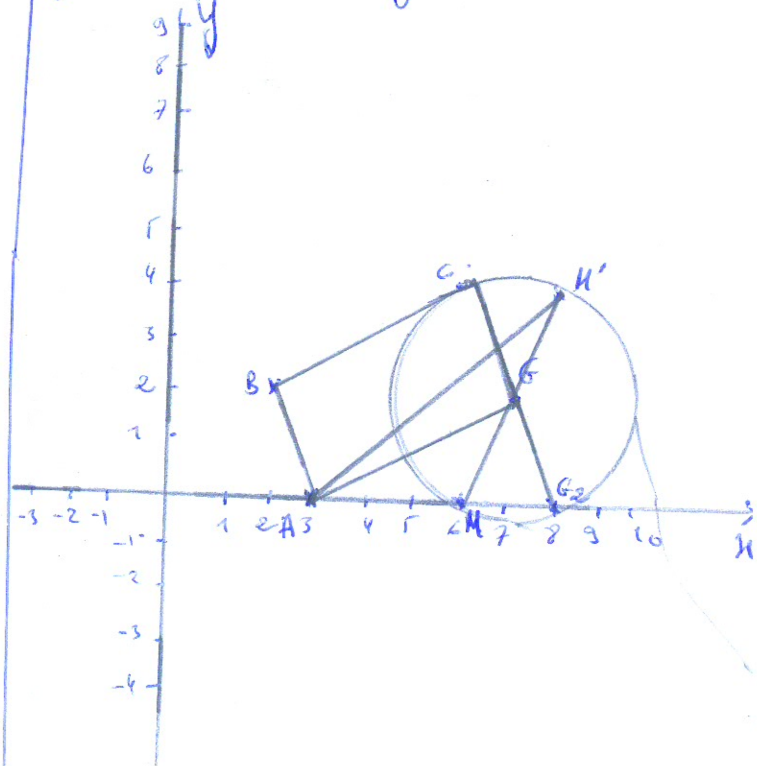
et de rapport $k-2 = 1$ Alors c'est une symétrie centrale de centre ...

Donc G est le milieu du segment [MM']

D'où le barycentre R du système $\{(A,1);(M,1);(M';1)\}$ est celui de $\{(A,1);(G;2)\}$. Donc $\vec{AR} = \frac{2}{3}\vec{AG}$.

Comme $\vec{AG} = \vec{BC}$ on retrouve le résultat précédent $\vec{AR} = \frac{2}{3}\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{BC}$.

Le centre de gravité R du triangle AMM' est fixe car le milieu G des pt variés M et M' est un pt fixe.



SC

Bac

2013

SC Ex : 1

Vuzza M/Mounah

Correction du Bac 2013 SC

EX : 1.

1/.

1)- a

a)- $f(x) = -1 + \dfrac{2e^{x}}{e^{x}+1}$

• $f(x) = \dfrac{-e^{x}-1+2e^{x}}{e^{x}+1}$

$f(x) = \dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1} = f(x)$

• $f(x) = 1 - \dfrac{2}{e^{x}+1}$

• $f(x) = \dfrac{e^{x}+1-2}{e^{x}+1}$

• $f(x) = \dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1} = f(x)$

b) -

b/- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1} = -1$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1} = -1 \end{cases}$

• $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim \dfrac{e^{x}+1}{e^{x}+1} = FI$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty \\ \lim \dfrac{+\infty}{+\infty} = FI \end{cases}$

ou $f(x) = 1 - \dfrac{2}{e^{x}+1}$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} 1 - \dfrac{2}{e^{x}+1} = 1.$

Car $\left\{ \lim \dfrac{-2}{e^{x}+1} = \dfrac{-2}{+\infty} = 0. \right.$

Intrepretation

• pour $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 1.$

$\mathcal{C}_f$ admet AH : $y=1$ au voisinage $+\infty$.

• $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -1$

$\mathcal{C}_f$ admet un AH $y=-1$ au V$-\infty$

2.-a) TVf :

$D_f = \mathbb{R}.$

• $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -1$

• $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 1$

• $f'(x) = \dfrac{e^{x}(e^{x}+1) - e^{x}(e^{x}-1)}{(e^{x}+1)^2}$

• $f'(x) = \dfrac{\cancel{e^{2x}} + e^{x} - \cancel{e^{2x}} + e^{x}}{(e^{x}+1)^2}$

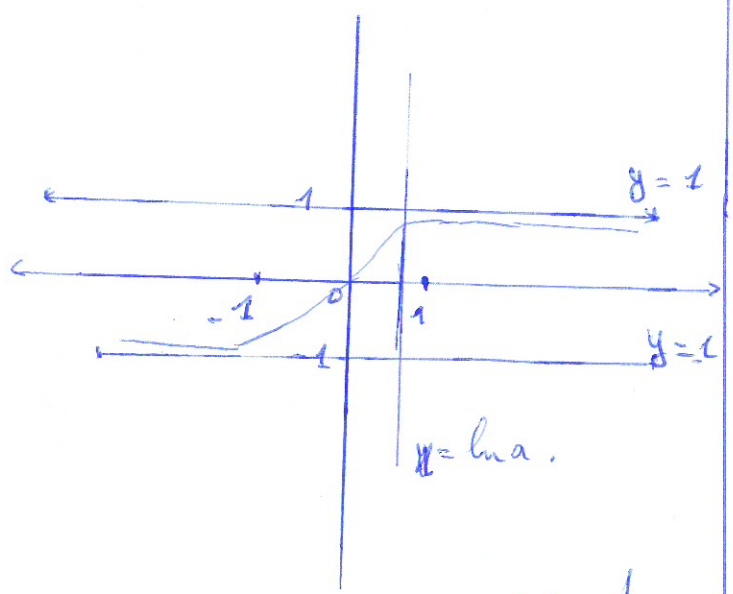
• $f'(x) = \dfrac{2e^{x}}{(e^{x}+1)^2} > 0.$

$\cdot\ f'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0.$

Tvf.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1 ↗	0	↗ 1

2b).



c)- L'aire demandé est

$A = \int_0^{\ln a} f(x)dx =$

$A = \int_0^{\ln a} \left(-1 + \dfrac{2e^x}{1+e^x}\right) dx.$

$A = \left[-x + 2\ln(1+e^x)\right]_0^{\ln a}$

$A = -\ln a + 2\ln(1+a) - 2\ln 2$

$A = 2\ln\sqrt{a} + 2\ln(1+1) - 2\ln 2$

$A = 2\left(\dfrac{\ln(1+a)}{2\sqrt{a}}\right)$

3-a)

$I_1 = \int_0^{\ln a} f(t)dt = 2\ln\left(\dfrac{1+a}{2\sqrt{a}}\right)$

b)- $1 - 2f'(x) = 1 - \dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2}$

$1 - 2f'(x) = \dfrac{1 + e^{2x} + 2e^x - 4e^x}{(1+e^x)^2}$

$1 - 2f'(x) = \left(\dfrac{(e^x-1)}{e^x+1}\right)^2 = f^2(x)$

$I_2 = \int_0^{\ln a} f^2(t)\, dt = \int_0^{\ln a} (1 - 2f'(x))$

$I_2 = \int_0^{\ln a} 1 - 2f'(x)dx$

$I_2 = \left[x - 2f(t)\right]_0^{\ln a}$

$I_2 = \ln a - 2f(\ln a) + \underbrace{2f(0)}_{0}$

$I_2 = \ln a - 2\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)$

c)- pour

$0 \leq t \leq \ln a.$

$f(0) \leq f(t) \leq f(\ln a)$

$0 \leq f(t) \leq \dfrac{a-1}{a+1}.$

$0 \leq f^n(t) \leq \left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^n$

En appliquant I m sur $[0 ; \ln a]$ pour f

$0 \leq \int_0^{\ln a} f^n(t)\,dt \leq \left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^n \cdot \ln a$

on a $\lim_{+\infty} \left[\dfrac{a-1}{a+1}\right]^n = \lim_{+\infty} \dfrac{x^n\left(1-\frac{1}{a}\right)^n}{x^n\left(1+\frac{1}{a}\right)^n}$

$\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\left(1-\frac{1}{a}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^n}$

$\Rightarrow \ = 0 \times \dfrac{1}{+\infty} = 0 \times 0 = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n = 0.$

Car $0 < 1-\frac{1}{a} < 1$

et $1+\frac{1}{a} > 1$

• donc Selon Theorème de gendarme $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0.$

d/- Selon la linearité de l'intégrale

$$I_n - I_{n+2} = \int_0^{\ln a} f^n(t) - f^{n+2}(t)\,dt.$$

$$I_n - I_{n+2} = \int_0^{\ln a} f^n(t)\left(1 - f^2(t)\right)dt.$$

$$I_n - I_{n+2} = \int_0^{\ln a} 2 f'(t) f^n(t)\,dt.$$

$$I_n - I_{n+2} = 2\left[\frac{f^{n+1}(t)}{n+1}\right]_0^{\ln a}$$

$$= \frac{2}{n+1}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{n+1}$$

Car $f(\ln(a)) = \frac{a-1}{a+1}$

4-a) - on a: $I_n - I_{n+2} = \frac{2}{n+1}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{\ln a}$

- pour $k = n+1$

donc $S_n(a) =$

$$\frac{1}{2}\left(I_{k-1} - I_{k+1}\right) = \frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k$$

donc $S_n(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(I_{k-1} - I_{k+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_{k-1}$$

$$S_n(a) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_{k+1}$$

$$S_n(a) = \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{2}(I_1 + I_2 \cdots)$$

$$S_n(a) = -\frac{1}{2}(I_2 + I_3 + \cdots I_{n-1}) - \cdots$$

$$\cdots - \frac{1}{2} I_{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{2} I_2 + \frac{1}{2}(\cancel{I_2 + I_3} + I_n - $$

$$- \frac{1}{2}(\cancel{I_2 + I_3} \cdots I_{n-1})$$

$$- \frac{1}{2} I_n - \frac{1}{2} I_{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n(a) = \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{2} I_1 - \frac{1}{2} I_n - \frac{1}{2} I_{n+1}$$

Par passage a la limite lorsque $n \to +\infty$ on trou

$$\lim S_n(a) = \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{2} I_1 - \frac{1}{2}\cancel{I_0} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln a + \frac{1}{2}\cdot 2\ln\left(\frac{a+1}{a+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln a + \ln\left(\frac{a+1}{2\sqrt{a}}\right)$$

$$\lim S_n(a) = \ln\frac{\sqrt{a}\times(a+1)}{2\sqrt{a}} = \ln\frac{(a+1)}{2}.$$

b) - $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{9}{11}\right)^k = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a}\left(\frac{10-1}{10+1}\right)^k$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a}\left(\frac{10-1}{10+1}\right)^k$$

$$T_n = S(10).$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(10)$

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \ln\frac{(10+1)}{2} = \frac{\ln 11}{2}$$

Vu et corrigé

SC

Bac 2013

Ex : 3.

④ SC : 2013

Vayza Moustapha Mounah.
Bac 2013 SC ; Ex①.

1 - a) $f(x) = -\dfrac{1+2e^x}{e^x+1}$

$f(x) = \dfrac{-e^x - 1 + 2e^x}{e^x+1}$

• $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x+1}$

or $1 - \dfrac{2}{e^x+1} = \dfrac{e^x+1-2}{e^x+1}$

• $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x+1}$

(b) - $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -1 + \dfrac{2\times 0}{0+1}$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = -1$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} 1 - \dfrac{2}{1+e^x} = 1$

car $\left\{ \lim\limits_{+\infty} \dfrac{2}{1+e^x} = \dfrac{2}{+\infty} = 0 \right.$

Interprétation

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

C_f admet AH : $y = -1$ au $V(-\infty)$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} 1 - 0 = 1$

C_f admet une AH : $y = 1$ au $V(+\infty)$.

2 a) - $f(x) = 1 - \dfrac{2}{1+e^x}$

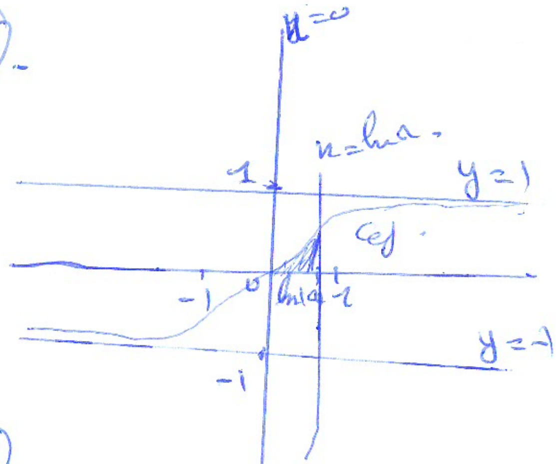
$f'(x) = \dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2} > 0$

donc $f \nearrow$.

TV f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	-1	0	1 ↗

(b) -



(c). • L'aire demandée est

$A = \int_0^{\ln a} \left(-1 + \dfrac{2e^x}{1+e^x}\right) dx$ u.a

$A = \left[-x + 2\ln(1+e^x)\right]_0^{\ln a}$

$A = -\ln a + 2\ln(1+a) - 2\ln 2$

$A = 2\ln\sqrt{a} + 2\ln(1+a) - 2\ln 2$

$A = 2\left(\ln\left(\dfrac{1+a}{2\sqrt{a}}\right)\right)$

3-a) $I_1 = \int_0^{\ln a} f(t)\,dt = 2\ln\left(\frac{1+a}{2\sqrt{a}}\right)$.

b)- $1-2f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(1+e^x)^2}$

$1-2f'(x) = \frac{1+e^{2x}+2e^x-4e^x}{(1+e^x)^2}$

$1-2f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{1+e^x}\right)^2$

$1-2f'(x) = f^2(x)$.

$1-2f'(x) = f^2(x)$.

$I_2 = \int_0^{\ln a}(1-2f'(x))\,dx$

$I_2 = [x - 2f(x)]_0^{\ln a}$,

$\Rightarrow I_2 = \ln a - 2f(\ln a) + \cancel{2f(0)}$

$\boxed{I_2 = \ln a - 2\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}$

c)- pour $0 \leq t \leq \ln a$

$0 \leq f(t) \leq f(\ln a)$

$0 \leq f(t) \leq \frac{a-1}{a+1}$

$0 \leq f^n(t) \leq \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n$

En Apliquant I.m. sur $[0;\ln a]$ pour f.

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^{\ln a} f(t)^n dt \leq \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n \ln a$.

on a $\lim_{+\infty}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n = \lim_{+\infty}\frac{a^n(1-\frac{1}{a})^n}{a^n(1+\frac{1}{a})^n}$

$\lim_{+\infty}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n = \lim_{+\infty}\frac{a^n(1-\frac{1}{a})^n}{a^n(1+\frac{1}{a})^n}$

$\lim_{+\infty}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n = 0 \times \frac{1}{+\infty} = 0$

Car $0 < 1-\frac{1}{a} < 1$

et $1+\frac{1}{a} > 1$.

donc d'après theorème de Gendarme $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

d)- Selon linearité de l'intégrale..

$I_n - I_{n+2} = \int_0^{\ln a} f^n(t) - f^{n+2}(t)\,dt$.

$= \int_0^{\ln a} f^n(t)\,(1-f^2(t))\,dt$

$= \int_0^{\ln a} 2f'(t)\,f^n(t)\,dt$.

$I_n - I_{n+2} = 2\left[\frac{f^{n+1}(t)}{n+1}\right]_0^{\ln a}$.

$I_n - I_{n+2} = \frac{2}{n+1}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{n+1}$

Car $f(\ln a) = \frac{a-1}{a+1}$

et $f(0) = 0$.

4) a)- on a $I_n - I_{n+2} = \frac{2}{n+1}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{n+1}$

pour $k = n+1$, $\frac{1}{2}(I_{k-1} - I_{k+1}) = \frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k$

donc $\frac{1}{2}(I_{k-1} - I_{k+1}) = \frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k$

donc $S_n(a) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(I_{k-1} - I_{k+1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_{k-1}$

$S_n(a) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_{k+1}$.

Alors

$$S_n(a) = \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}(I_2 + I_3 \cdots + I_{n-1})$$
$$-\frac{1}{2}(I_2 + I_3 \cdots I_{n-1}) - \frac{1}{2}I_n - \frac{1}{2}I_{n+1}$$

$$S_n(a) = \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}(I_2 + I_3 \cdots + I_{n-1}) - \frac{1}{2}(I_2 + I_3 \cdots I_{n+1})$$
$$\cdots - \frac{1}{2}I_n - \frac{1}{2}I_{n+1}$$

$$S_n(a) = \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2}I_1 - \frac{1}{2}I_n - \frac{1}{2}I_{n+1}$$

par passage a la limite lorsque $n \to +\infty$, ontrouve :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(a) = \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2}I_1 - \frac{1}{2}\times 0 - \frac{1}{2}\times 0$$
$$= \frac{1}{2}\ln a + \ln\frac{(a-1)}{2\sqrt{a}}$$
$$= \ln \sqrt{a} \times \frac{(a+1)}{2\sqrt{a}}.$$
$$\lim_{n\to+\infty} S_n(a) = \ln\left(\frac{a+1}{2}\right).$$

(b) $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{9}{11}\right)^k$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a}\left(\frac{10-1}{10+1}\right)^k$$

$$T_n = S_n(10)$$

donc $\lim_{n\to+\infty} T = ?$

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{+\infty} S_n(10)$$
$$= \ln\left(\frac{10+1}{2}\right)$$
$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \ln\left(\frac{11}{2}\right).$$

Vay

Bac
2014

Ex 3

Vayza Moustapha Mamadou.

Correction du Bac 2014 SN.

Ex : (3).

$D_f = [0 ; +\infty[$.

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right), x>0. \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

a) - Mq f. cont à droite de zéro.
tq $f(x) = x\ln(x+1) - x\ln x$.

1.a) - On a : $f(0) = 0$ et

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

" $= \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

" $= \lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln(x+1) - \ln x)$.

" $= \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x+1) - x\ln x$

" $= \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x+1) - \underbrace{x\ln x}_{0}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 - 0 = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

D'où f est continue a droite en 0.

b) - $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{x}$.

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$.

f n'est pas dble a droite de 0.

f n'est pas dérivable 0^+ et la courbe est telle
$\mathcal{E}$ de f admet au pt d'abscisse.
un demi tangente vertical.

c) - $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty \times 0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim 0 \times +\infty$ F I.

on pose $t = \frac{1}{x}$.
qd $x \to +\infty \Rightarrow t \to 0^+$.
$\lim\limits_{x\to +\infty}$

• $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} =$

• $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

Donc : $y = 1$ $\mathcal{E}_f$ admet un.
A H : $y = 1$ au voisinage de $+\infty$

2-a) $\forall x > 0 \Rightarrow f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

a $f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)$

$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

a $f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{(x+1)^2}$.

$= \frac{-1\times(x+1)}{x(x+1)^2} + \frac{1\times x}{x(x+1)^2}$

$f''(x) = \frac{-x \cancel{+1} + x}{\ldots} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0 ; \forall x > 0.$$

Donc f' est décroissante sur $]0;+\infty[$.

TL : $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}\right)$

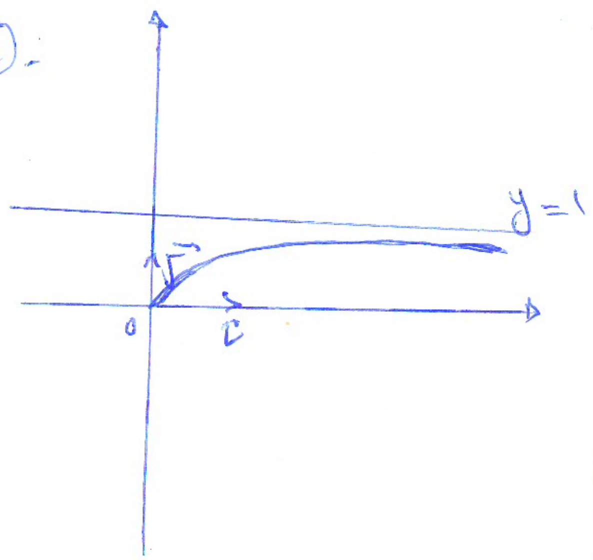
$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0 - 0 = 0,$

D'où : $\forall x > 0$, $f(x) > 0$.

TV de f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

(C).



3-a) pour que A_n existe il suffit que f_n soit continue sur $[0;1]$.

Montrons que f_n est continue sur $[0;1]$.

• Sur $]0;1]$: $f_n(x) = x^n \ln(1+\frac{1}{x})$.

le produit de deux fonctions $x \longmapsto x^n$ et $x \longmapsto \ln(1+\frac{1}{x})$ continues sur $]0;1]$ d'où :

f_n est continue sur $]0;1]$.

- Etudions la continuité de f_n à dte de 0.

$$\lim_{x\to0^+} f_n(x) = \lim_{0^+} x^n \ln(1+\frac{1}{x})$$
$$= \lim_{0^+} x^n \ln(\frac{x+1}{x})$$
$$= \lim_{0^+} x^n \ln x+1) - x^n \ln x$$
$$= \lim_{0^+} x^n \ln(x+1) - x^n \ln x$$

• $\lim\limits_{0^+} f(x) = 0 - 0 = f_n(0)$

D'où f_n est continue sur $[0;1]$.

et l'intégrale $A_n = \int_0^1 f_n(x)dx$ existe et cette écriture définit bien une suite numérique A_n.

3) (b) D'après le TVJ définie dans la question 1) on a :
$\forall x \geq 0 ; \quad 0 \leq f(x) \leq 1$

D'où en multipliant par x^{n-1}
on a : $\forall x \in [0;1]$,
$0 \leq f(x) \leq 1$
$0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$

(c) $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

or $\forall x \in [0;1]$, $f_n(x) = x^{n-1} f(x)$.
D'où $\forall x \in$ $0 \leq f_n(x) \leq x^{n-1}$

Donc : $\forall n \in$
$0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 x^{n-1}\,dx$

$0 \leq A_n \leq \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1$

Donc : $\forall n \geq 1$; $0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}$.

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

d'après Théorème de Gendarme
$\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 0$.

2) - a) $I(\alpha) = \int_\alpha^1 x^n \ln x\,dx$,

on pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \to u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x^n \to v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$

$I(\alpha) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\,dx$

$I(\alpha) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_\alpha^1$

$I(\alpha) = 0 - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha + \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}$

$I_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha - \frac{1}{(n+1)^2}$

(b) $\lim\limits_{n\to 0^+} I(\alpha) = \lim\limits_{0^+} \left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$\lim\limits_{n\to 0^+} I(\alpha) = 0 - 0\times 0 - \frac{1}{(n+1)^2}$

$\lim\limits_{n\to 0^+} I(\alpha) = \frac{1}{(n+1)^2}$

(c) $J_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)\,dx$,

On pose.
$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \ln(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = (x+1)\ln(x+1) \end{cases}$

On obtient $v(x)$ en utilisant

$J_{n+1} = \left[x^{n+1}(x+1)\ln(x+1) - x\right]_0^1$
$\quad \ldots - (n+1)\int_0^1 (x^{n+1} + x^n)\ln(x+1)\,dx$

$J_{n+1} = 2\ln 2 - (n+1)\int_0^1 (x^{n+1}\ln(x+1) + x^n\ln\ldots$
$\quad \ldots + \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{n+1} - 0\right)$.

$J_{n+1} = 2\ln 2 - (n+1)J_{n+1} - (n+1)J_n - \frac{1}{n+\ldots}$

$J_{n+1} + (n+1)J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1)J_n$.

$(n+2)J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1)J_n$

$J_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)} - \frac{n+1}{2n+2}J_n$

$J_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{(n+1)}{n+2}J_n$

2011

SN

Ex : 3

• Vayga Moustapha Mounah.

Bac : 2011 S N

Ex ③.

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$.

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1-a) - $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)}$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = \frac{0-1}{0+1} = -1$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = \frac{e^{x}(1-e^{-2x})}{e^{x}(1+e^{-2x})}$

$= \frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}$.

◦ $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \frac{1-0}{1+0} = 1$

Intrepretation

C_f admet deux asyptote horizontal au voisinge $(\pm\infty)$.

• $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 1$ AH : $y = 1$ $V(+\infty)$

• $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -1$ AH : $y = -1$ $V(-\infty)$

b) Mq f est impaire c-a-d

$f(-x) = -f(x)$

$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x}+e^{x}} = -f(x)$

alors f est une fonction impaire.

TVf : $\lim\limits_{-\infty} f(x) = 1$ $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 1$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$.

$f'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})'}{e^x + e^{-x}}$.

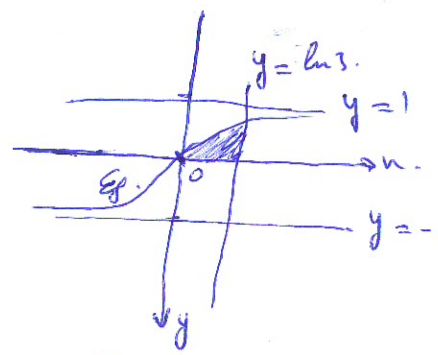
$f'(x) = \frac{(e^{2x} + 2e^{-x}e^{x} + e^{-2x}) - (e^{2x} - e^{x-x} + \dots)}{(e^x + e^{-x})^2}$

$f'(x) = \frac{4e^{x-x}}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} > 0$

T.V f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

c)-



$A = \int_0^{\ln 3} f(x)\,dx$.

$A = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$.

$A = [\ln(e^x + e^{-x})]_0^{\ln 3}$

$A = \ln(3 + \frac{1}{3}) - \ln 2$

$A = \ln\frac{10}{3} - \ln 2$

$A = \ln\left(\frac{\frac{10}{3}}{2}\right) = \ln\left(\frac{10}{6}\right)$

$A = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

(2)

2 2-a) Calcul u_1 ?

$u_n = \int_0^{\ln 3} f(t)^n dt$.

$u_1 = \int_0^{\ln 3} f(t)\, dt$.

c'est l'aire d'égal en 1-d).

$u_1 = A = \ln \frac{5}{3}$.

(b) Mq. $0 \leq u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \ln 3$.

$0 \leq t \leq \ln 3$.

$f \nearrow$

$f(0) \leq f(t) \leq f(\ln 3)$

$0 \leq f(t) \leq \frac{4}{5}$

car $f(\ln 3) = \frac{4}{5}$.

$0 \leq (f(t))^n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

d'après l'I intégrale

Moyenne.

$0 \leq u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \int_0^{\ln 3} dt$.

$0 \leq u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \ln 3$.

Comme $\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$.

d'après le Théorème de Gendarme.

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Vérifions que pour tout $n \geq 0$.

$x \ldots 1 - f'(x) = (f(x))^2$.

$1 - f'(x) = (f(x))^2$

$1 - f'(x) = \frac{1 - 4e^{x}e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$

$1 - f'(x) = \frac{(e^{2x} + 2e^{x}e^{-x} + e^{-2x}) - 4e^{x}e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$.

$1 - f'(x) = \frac{e^{2x} - 2e^{x}e^{-x} + e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2}$

$1 - f'(x) = \left(\frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}\right)$

$1 - f'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = f(x)^2$

Mq $\forall n \geq 0$.

$u_{n+2} - u_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

$u_{n+2} - u_n = \int_0^{\ln 3} (f(t))^{n+2} - (f(t))^n\, dt$

$u_{n+2} - u_n = \int_0^{\ln 3} f(t)^n [f^2(t) - 1]$

$u_{n+2} - u_n = \int_0^{\ln 3} (f(t))^n [-f'(t)]$

$u_{n+2} - u_n = -\int_0^{\ln 3} f(t)^n f'(t)\, dt$

$u_{n+2} - u_n = \left[-\frac{1}{n+1} f(t)^{n+1}\right]_0^{\ln 3}$

$u_{n+2} - u_n = -\frac{1}{n+1} [f(\ln 3)^{n+1} - f(0)^n]$

$u_{n+2} - u_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

Alors $\forall n \geq 0$.

$u_{n+2} - u_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^n$

(d) - pour tout entier

• Montrons de m̂ que

$$U_{2n+1} = \ln\frac{5}{3} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p}$$

on applique la relation demontrée dans la question 2_c)

$$U_k - U_{k-2} = \frac{-1}{k-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$$

pour les termes successifs d'indices impaires de la suite (U_n), termes d'indice

$$k = 2p+1 \text{ et } k-2 = 2p-1$$

$$p \in \mathbb{N}^*$$

donc $U_{2p+1} - U_{2p-1} = \dfrac{-1}{2p}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2p}$

$\forall\, p \geq 1.$

e)_ $n \geq 1$

$$S_n = \frac{4}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3 + \dots + \frac{1}{2n}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n} = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p}\left(\frac{4}{5}\right)^{p}$$

Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n =$