Fatma/Elbahi

Exercice 2 : a)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 8 \end{cases}$$ et on pose $v_n = u_n - 2$

1) - calculer u_1 ; u_2 ; u_3

2) - calculer v_0 ; v_1 ; v_2

3) Montrer que (v_n) est une suite géométrique

4) Ecrire v_n en fonction de n

5) En déduire u_n en fonction de n

6) Etudier la convergence des suites (u_n) et (v_n)

Solution :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 8 \end{cases} ; \; v_n = u_n - 2$$

1) $n = 0 \Rightarrow u_1 = 5u_0 - 8 = 5 \times 3 - 8 \Rightarrow \boxed{u_1 = 7}$

$n = 1 \Rightarrow u_2 = 5u_1 - 8 = 5 \times 7 - 8 \Rightarrow \boxed{u_2 = 27}$

2) $v_0 = u_0 - 2 = 3 - 2 \Rightarrow \boxed{v_0 = 1}$

$v_1 = u_1 - 2 = 7 - 2 \Rightarrow \boxed{v_1 = 5}$

$V_2 = u_2 - 2 = 27 - 2 \Rightarrow \boxed{V_2 = 25}$

3) Il suffit de montrer que $V_{n+1} = q \cdot V_n$; q constante.

On a $V_{n+1} = u_{n+1} - 2$

$= 5u_n - 8 - 2$

$= 5u_n - 10$

$= 5(u_n - 2) = 5V_n$

alors (V_n) est une suite Geometrique de raison $q = 5$

4) $V_n = V_0 \cdot q^n = 1.5^n \Rightarrow V_n = 5^n$

5) $V_n = u_n - 2 \Rightarrow u_n = V_n + 2 \Rightarrow u_n = 5^n + 2$

6) comme $5 > 1$ alors

$\lim\limits_{n \to +\infty} 5^n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

De même

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

alors les suites (u_n) et (V_n) sont divergente.

Application:

reprendre l'expression precedant dans chacun des cas suivantes:

1) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -2u_n + 9 \end{cases}$; $V_n = u_n - 3$

2) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 2 \end{cases}$; $V_n = u_n - \frac{8}{3}$

3) $\begin{cases} u_1 = 9 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 10}{u_n - 3} \end{cases}$; $V_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 5}$