EXERCICE

Soit $z = e^{i\frac{\pi}{2013}}$ **. On pose** $S = 1 + z^2 + z^4 + ... + z^{2012}$ **.**

1) Montrer que $S = \dfrac{1}{1-z}$ **.**

2) Ecrire S sous forme algébrique.

3) En déduire que : $\cos\dfrac{2\pi}{2013} + \cos\dfrac{4\pi}{2013} + ... + \cos\dfrac{2012\pi}{2013} = \dfrac{-1}{2}$.

Exercice 3

$$z = e^{i\frac{\pi}{2013}}$$

$$S = 1 + z^2 + z^4 + \dots z^{2012}$$

on remarque que.

① $S = 1 + z^2 + (z^2)^2 + \dots + (z^2)^{1012}$

$S = 1 + q + q^2 + \dots + q^{1006}$

avec $q = z^2$,

On a $q \neq 1$ car $q = e^{i\frac{2\pi}{2013}}$

comme S est la somme d'une suite géometrique.

$$S = \frac{1 - q^{1007}}{1 - q}$$

$$S = \frac{1 - (z^2)^{1007}}{1 - z^2}$$

$$S = \frac{1 - z^{2014}}{1 - z^2}$$

On peut écrire

$$S = \frac{1 - z^1 \cdot z^{2013}}{1 - z^2}$$

Or $z^{2013} = e^{i\pi} = -1$

$$S = \frac{1 - (z)(-1)}{1 - z^2}$$

$$S = \frac{1 + z}{1 - z^2}$$

$$S = \frac{1 + z}{(1 - z)(1 + z)}$$

Enfin

$$\boxed{S = \frac{1}{1 - z}}$$

② Forme alegebrique de S on pose.

$S = \frac{1}{1 - e^{i\alpha}}$ avec $\alpha = \frac{\pi}{2013}$

$$S = \frac{1}{e^{i0} - e^{i\alpha}}$$

$$S = \frac{1}{2i\sin\left(\frac{-\alpha}{2}\right) \cdot e^{i\frac{\alpha}{2}}}$$

$$S = \frac{1}{2i\sin\left(\frac{-\alpha}{2}\right) \cdot e^{i\frac{\alpha}{2}}}$$

$$S = \frac{1}{-2i\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{-i\frac{\alpha}{2}}$$

$$S = \frac{i}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \times e^{-i\frac{\alpha}{2}}$$

$$S = \frac{i\left(\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$S = \frac{i\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$S = \frac{i\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\cot\frac{\alpha}{2}}$$

C'est la forme algebrique de S

③ on a d'après ② $Re(S) = \frac{1}{2}$

D'autre part, $S = 1 + e^{i\frac{2\pi}{2013}} + e^{i\frac{4\pi}{2013}} + \dots e^{i\frac{2012\pi}{2013}}$

$$Re(S) = 1 + \cos\frac{2\pi}{2013} + \cos\frac{4\pi}{2013} \dots + \cos\frac{2012\pi}{2013}$$

par identification.

$$1 + \cos\frac{2\pi}{2013} + \cos\frac{4\pi}{2013} + \dots \cos\frac{2012\pi}{2013} = \frac{1}{2}$$

On transpose 1, on obtient

$$\cos\frac{2\pi}{2013} + \cos\frac{4\pi}{2013} + \dots \cos\frac{2012\pi}{2013} = \frac{1}{2} - 1$$

En fin

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{2013} + \cos\frac{4\pi}{2013} \dots + \cos\frac{2012\pi}{2013} = -\frac{1}{2}}$$