EXERCICE 3 (3 POINTS)

Soit $z = e^{i\frac{\pi}{2013}}$. On pose $S = 1 + z^2 + z^4 + \ldots + z^{2012}$.

1) Montrer que $S = \dfrac{1}{1-z}$.

2) Ecrire S sous forme algébrique.

3) En déduire que : $\cos\dfrac{2\pi}{2013} + \cos\dfrac{4\pi}{2013} + \ldots + \cos\dfrac{2012\pi}{2013} = \dfrac{-1}{2}$.

Solution : Fatimetou Abdellahi Seyid.

$z = e^{i\frac{\pi}{2013}}$

$S = 1 + z^2 + z^4 + \ldots + z^{2012}$

On remarque :

① $S = 1 + z^2 + (z^2)^2 + \ldots + (z^2)^{1006}$

$S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{1006}$

avec : $q = z^2$

On a : $q \neq 1$ Car $q = e^{i\frac{2\pi}{2013}}$

Comme S est la somme d'une suite géometrique :

$$S = \frac{1 - q^{1007}}{1 - q}$$

$$S = \frac{1 - (z^2)^{1007}}{1 - z^2} = \frac{1 - z^{2014}}{1 - z^2}$$

On peut l'écrire :

$$S = \frac{1 - z \cdot z^{2013}}{1 - z^2}$$

Or : $z^{2013} = e^{i\pi} = -1$

$$S = \frac{1 - (z)(-1)}{1 - z^2} = \frac{1 + z}{1 - z^2} = \frac{\cancel{1+z}}{(\cancel{1+z})(1-z)}$$

Enfin : $S = \dfrac{1}{1-z}$

2) F. algebrique de S :

On pose : $z = e^{i\alpha}$

$S = \dfrac{1}{1 - e^{i\alpha}}$, avec $\alpha = \dfrac{\pi}{2013}$

$S = \dfrac{1}{e^{i0} - e^{i\alpha}}$

$\boxed{e^{ix} - e^{iy} = 2i \sin \dfrac{x-y}{2} e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}}$

$S = \dfrac{1}{2i \sin\left(\frac{-\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}}$

$\boxed{\sin(-x) = -\sin x}$

$S = \dfrac{1}{-2i \sin\frac{\alpha}{2}} e^{i\frac{\alpha}{2}}$

$\boxed{\dfrac{1}{-i} = +i}$

$S = \dfrac{i}{2\sin\frac{\alpha}{2}} e^{-i\frac{\alpha}{2}}$

$\boxed{e^{-i\frac{\alpha}{2}} = \cos\dfrac{\alpha}{2} - i\sin\dfrac{\alpha}{2}}$

$S = \dfrac{i(\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2})}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

on developpe

$S = \dfrac{i\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

on casse la barre

$S = \dfrac{i\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

on simplifie

$$\boxed{S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \cotg \frac{\alpha}{2}}$$

C'est la forme algebrique de S.

3) On a d'après ② $Ré(S) = \dfrac{1}{2}$

D'autre part : $S = 1 + e^{i\frac{2\pi}{2013}} + e^{i\frac{4\pi}{2013}} + \dots + e^{i\frac{2012\pi}{2013}}$

Alors:

$$Ré(S) = 1 + \cos\frac{2\pi}{2013} + \cos\frac{4\pi}{2013} + \dots + \cos\frac{2012\pi}{2013}$$

Par identification :

$$1 + \cos\frac{2\pi}{2013} + \cos\frac{4\pi}{2013} + \dots + \cos\frac{2012\pi}{2013} = \frac{1}{2}$$

On transpose 1 . On obtient :

$$\cos\frac{2\pi}{2013} + \cos\frac{4\pi}{2013} + \dots + \cos\frac{2012\pi}{2013} = \frac{1}{2} - 1$$

En fin :

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{2013} + \cos\frac{4\pi}{2013} + \dots + \cos\frac{2012\pi}{2013} = -\frac{1}{2}}$$