Exercice 2 (Bac 2010)

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-z^2-4z-6$.

a) Calculer $P(3)$.

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a: $P(z)=(z-3)(z^2+az+b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation $P(z)=0$.

2. On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, les points A, B , C et D d'affixes respectives $z_A=3+2i$, $z_B=-1+i$, $z_C=-1-i$ et $z_D=3$.

a) Placer les points A, B , C et D dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) Comparer l'affixe du milieu de $[AC]$ à celle du milieu de $[BD]$.

c) En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

d) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-3|=|z+1-i|$.

cheikhani / Bedi / Toulba ; 1808 ; EL-MAARIF ; 7D4

Bac 2010 :

Solutions :

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - z^2 - 4z - 6$

a) Pour calculer $P(3)$ on remplace dans l'expression de $P(z)$:

$P(3) = 3^3 - 3^2 - 4.3 - 6 = 27 - 9 - 12 - 6$
$= 0$
$\Rightarrow P(3) = 0$

b) On détermine les réels a et b avec l'utilisation du tableau d'**Horner** :

	1	-1	-4	-6
3		3	6	6
	1	2	2	0

D'où : $a = 2$, $b = 2$

$P(3) = 0$ et $P(z) = (z-3)(z^2+2z+2)$

c) Pour resoudre l'équation $P(z) = 0$:

Soit $z - 3 = 0$, donc $\boxed{z_0 = 3}$

Soit $z^2 + 2z + 2 = 0$

$\Delta = (2)^2 - 4(1)(2)$
$= 4 - 8$
$= -4$ $\quad S = 2i$

$z_1 = \dfrac{-2-2i}{2} = -1-i$

$\boxed{z_1 = -1-i}$

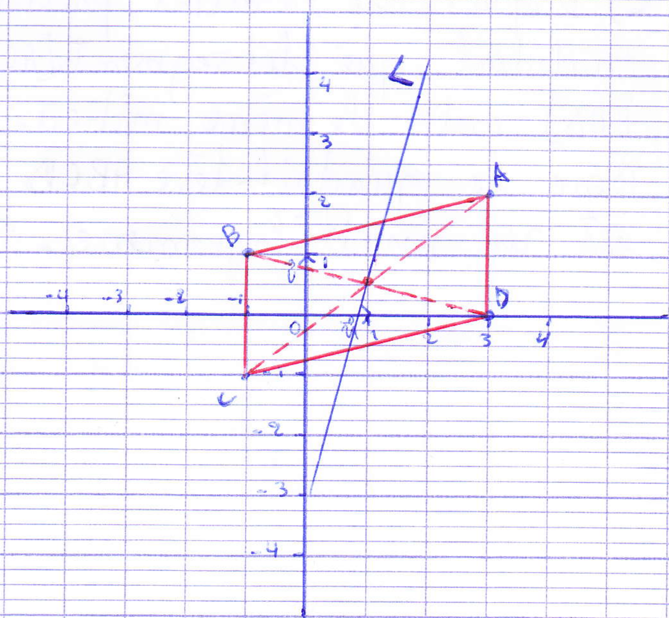
$\boxed{z_2 = -1+i}$

* Alors l'ensemble de solutions de l'équation $P(z) = 0$ est :
$S = \{3, -1+i, -1-i\}$

2. Le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a) Pour placer les points A, B, C et D on a :

$z_A = 3+2i \Rightarrow A(3, 2)$
$z_B = -1+i \Rightarrow B(-1, 1)$
$z_C = -1-i \Rightarrow C(-1, -1)$
$z_D = 3 \Rightarrow D(3, 0)$



cheikhani / Bedi / Toulba ; 1808 ; EL-MAARIF ; 7Dy

Bac : 2010 :

Solutions :

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - z^2 - 4z - 6$

a) Pour calculer $P(3)$ on remplace dans l'expression de $P(z)$:

$P(3) = 3^3 - 3^2 - 4.3 - 6 = 27 - 9 - 12 - 6$
$= 0$
$\Rightarrow P(3) = 0$

b) On determiner les réels a et b avec l'utilisation du tableau d'**Horner** :

	1	-1	-4	-6
3		3	6	6
	1	2	2	0

D'où : $a = 2$, $b = 2$

$P(3) = 0$ et $P(z) = (z-3)(z^2+2z+2)$

c) Pour resoudre l'equation $P(z) = 0$:

Soit $z - 3 = 0$, donc $\boxed{z_0 = 3}$

Soit $z^2 + 2z + 2 = 0$

$\Delta = (2)^2 - 4(1)(2)$
$= 4 - 8$
$= -4$ $S = 2i$

$z_1 = \dfrac{-2-2i}{2} = -1-i$

$\boxed{z_1 = -1-i}$

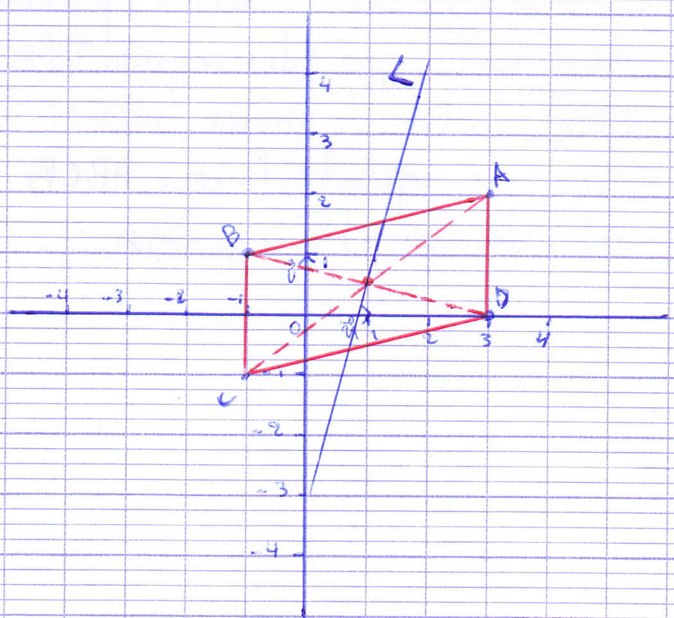
$\boxed{z_2 = -1+i}$

* Alors l'ensemble de solutions de l'equation $P(z) = 0$ est :
$S = \{3, -1+i, -1-i\}$

2. Le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a) Pour placer les points A, B, C et D on a :

$z_A = 3+2i \Rightarrow A(3, 2)$
$z_B = -1+i \Rightarrow B(-1, 1)$
$z_C = -1-i \Rightarrow C(-1, -1)$
$z_D = 3 \Rightarrow D(3, 0)$



cheikhani/Bedi/Toul3a/1808 ; EL-MAARif ; 7D4

b) * L'affixe du milieu de [AC] est égale à :

$$\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{3+2i-1-i}{2}$$

$$= \frac{2+i}{2}$$

$$= 1+\frac{1}{2}i$$

* l'affixe du milieu de [BD] est égale à :

$$\frac{z_B+z_D}{2} = \frac{3-1+i}{2} = \frac{2+i}{2}$$

$$1+\frac{1}{2}i$$

* On constate que les milieux des segment [AC] et [BD] ont le même affixe.

c) D'après le resultat précedent on deduit que les segments [AC] et [BD] ont le même milieu. Donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

d) Soit Γ l'ensemble des point M d'affixe z telle que $|z-3| = |z+1-i|$.

Alors $M \in \Gamma \iff |z_M - z_D| = |z_M - z_B|$

$M \in \Gamma \iff MD = MB$

Alors Γ et la médiatrice du segment [BD]