EXERCICE 2 (3 POINTS)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

E_α $\quad z^2 - 2z\sin\alpha + 1 = 0$ où α est un réel donné.

1) Résoudre l'équation E_α et donner les solutions sous formes algébrique et trigonométrique.

2) En déduire l'écriture exponentielle des solutions de l'équation :

$z^{2n} - 2z^n \sin\alpha + 1 = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Solution : Fatimetou / Abdellahi Seyid.

$E_\alpha = z^2 - 2z\sin\alpha + 1 = 0$

1° $\Delta = (2\sin\alpha)^2 - 4 = 4\sin^2\alpha - 4 = 4(\sin^2\alpha - 1) = -4\cos^2\alpha = (2i\cos\alpha)^2$

$\Rightarrow \delta = 2i\cos\alpha.$

$z_1 = \dfrac{2\sin\alpha + 2i\cos\alpha}{2} \Rightarrow \boxed{z_1 = \sin\alpha + i\cos\alpha}$ et $\boxed{z_2 = \sin\alpha - i\cos\alpha}$

Forme algébrique.

$z_1 = i(-i\sin\alpha + \cos\alpha)$

$= i(\cos\alpha - i\sin\alpha)$

$= e^{i\pi/2}e^{-i\alpha} \Longrightarrow \boxed{z_1 = e^{i(\pi/2 - \alpha)}}$

Forme trigonometrique : $\boxed{z_1 = 1(\cos(\pi/2 - \alpha) + i\sin(\pi/2 - \alpha))}$

$z_2 = \overline{z_1}$

$\Rightarrow z_2 = e^{-i(\pi/2 - \alpha)}$

F. trigo : $\boxed{z_2 = 1(\cos(-\pi/2 + \alpha) + i\sin(-\pi/2 + \alpha))}$

2° On pocède à un changement de variable dans l'équation :
$z^{2n} - 2z^n\sin\alpha + 1 = 0$

On pose : $z^n = z$. On trouve : $z^2 - 2z\sin\alpha + 1 = 0$

C'est l'équation de solutions : $z_1 = e^{i(\pi/2 - \alpha)}$ et $z_2 = e^{i(-\pi/2 + \alpha)}$

Si $Z^n = z_1$ <u>alors</u>:

$$Z^n = e^{i(\pi/2 - \alpha)}$$

$$\Rightarrow Z_k = e^{i(\pi/2n - \alpha/n + 2k\pi/n)} \quad k \in \{0; 1, \dots n-1\}$$

$$\Rightarrow Z_k = e^{i\left(\frac{(4k+1)\pi - 2\alpha}{2n}\right)} \quad k \in \{0, 1, \dots n-1\}$$

Si $Z^n = z_2$ <u>alors</u>:

$$Z^n = e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$$

$$\Rightarrow Z'_k = e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$$

$$\Rightarrow Z'_k = e^{i\left(-\frac{\pi}{2n} + \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad k \in \{0; 1, \dots n-1\}$$

$$Z'_k = e^{i\left(\frac{(4k-1)\pi + 2\alpha}{2n}\right)} \quad k \in \{0; 1, \dots n-1\}$$

<u>Conclusion</u>:

$S = \{Z_k ; Z'_k\}$ <u>avec</u> $k \in \{0; 1; 2, \dots n-1\}$