Nom: Zeinebou Sadegh

Exercice 1 :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{5U_n+1} \end{cases}$$ et On pose $V_n = \dfrac{1}{U_n}$

1) Calculer U_1, U_2, U_3

2) Calculer V_0, V_1, V_2

3) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique

4) Ecrire V_n en fonction de n

5) En déduire U_n en fonction de n

6) Etudier la convergence des suites (U_n) et (V_n)

Solution :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{5U_n+1} \end{cases} \qquad V_n = \frac{1}{U_n}$$

1) $n=0 \Rightarrow U_1 = \dfrac{U_0}{5U_0+1} = \dfrac{3}{5\times3+1}$ $\boxed{U_1 = \dfrac{3}{16}}$

$n=1 \Rightarrow U_2 = \dfrac{U_1}{5U_1+1} = \dfrac{\frac{3}{16}}{5\times\frac{3}{16}+1} = \dfrac{\frac{3}{16}}{\frac{15+16}{16}}$ $U_2 = \dfrac{\frac{3}{16}}{\frac{31}{16}}$ $\boxed{U_2 = \dfrac{3}{31}}$

$n=2 \Rightarrow U_3 = \dfrac{U_2}{5U_2+1} = \dfrac{\frac{3}{31}}{5\times\frac{3}{31}+1} = \dfrac{\frac{3}{31}}{\frac{15+31}{31}} = \dfrac{\frac{3}{31}}{\frac{46}{31}}$ $\boxed{U_3 = \dfrac{3}{46}}$

2) $V_0 = \dfrac{1}{U_0}$ $\boxed{V_0 = \dfrac{1}{3}}$, $V_1 = \dfrac{1}{U_1}$ $\boxed{V_1 = \dfrac{16}{3}}$, $V_2 = \dfrac{1}{U_2}$ $\boxed{V_2 = \dfrac{31}{3}}$

Il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$V_{n+1} - V_n$ = constante

on a :

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n}$$

$$= \frac{5U_n + 1}{U_n} - \frac{1}{U_n}$$

$$= \frac{5U_n + 1 - 1}{U_n} = \frac{5U_n}{U_n} \Rightarrow = 5 \text{ donc}$$

(V_n) est une S. Arithmetique de raison $\boxed{r = 5}$

4) $V_n = V_0 + nr$

$V_2 = \frac{1}{3} + 5n$

$V_2 = \frac{15n + 1}{3}$

5) $V_2 = \frac{1}{U_n} \Rightarrow U_n = \frac{1}{V_n}$

$\Rightarrow U_n = \frac{3}{15n + 1}$

6) $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \frac{15n + 1}{3} = +\infty$

(V_n) est alors divergente

$\lim U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} = \frac{3}{15n + 1} = 0$

U_n est donc convergente.

Application :

Reprendre l'exercice precedent dans chacun des cas suivants :

1) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{4U_n + 1} \end{cases}$, $V_n = \frac{1}{U_n}$

2) $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{2U_n + 3} \end{cases}$, $V_n = \frac{3}{U_n}$

3) $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{-2U_n}{7U_n - 2} \end{cases}$; $V_n = \frac{-2}{U_n}$