Nom = Selemha/mohamed

TD / Erraja

Les nombres complexes

Exercice : Bac 2010

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - z^2 - 4z - 6$.

a) Calculer $P(3)$.

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a: $P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 3+2i$, $z_B = -1+i$, $z_C = -1-i$ et $z_D = 3$.

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O;\vec{u}, \vec{v})$.

b) Comparer l'affixe du milieu de $[AC]$ à celle du milieu de $[BD]$.

c) En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

d) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-3| = |z+1-i|$.

Solution :

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - z^2 - 4z - 6$.

a) Pour calculer $P(3)$ on remplace dans l'expression de $P(z)$:

$P(3) = 3^3 - 3^2 - 4.3 - 6 = 27 - 9 - 12 - 6 = 0$

b) Pour déterminer les réels a et b telsque pour tout Z on a : $P(Z) = (Z-3)(Z^2+a$
on peut utiliser une identification ou une division euclidienne :

$$
\begin{array}{l|l}
Z^3 - Z^2 - 4Z - 6 & Z - 3 \\
\hline
Z^3 - 3Z^2 & Z^2 + 2Z + 2 \\
\quad 2Z^2 - 4Z - 6 & \\
\quad 2Z^2 - 6Z & \\
\qquad 2Z - 6 & \\
\qquad \underline{2Z - 6} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

On en déduit que $P(Z) = (Z-3)(Z^2+2Z+2)$; soit $\boxed{a=2}$ et $\boxed{b=2}$.

c) Pour résoudre l'équation $P(Z) = 0$

soit $Z - 3 = 0$, d'où $Z_0 = 3$.

soit $Z^2 + 2Z + 2 = 0$, d'où $\Delta = -4 = (2i)^2$, et les solutions sont : $Z_1 = -1-i$ et
$Z_2 = -1+i$.

Alors l'ensemble de solutions de l'équation $P(Z) = 0$ est :

$S = \{3, -1+i, -1-i\}$

2. le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

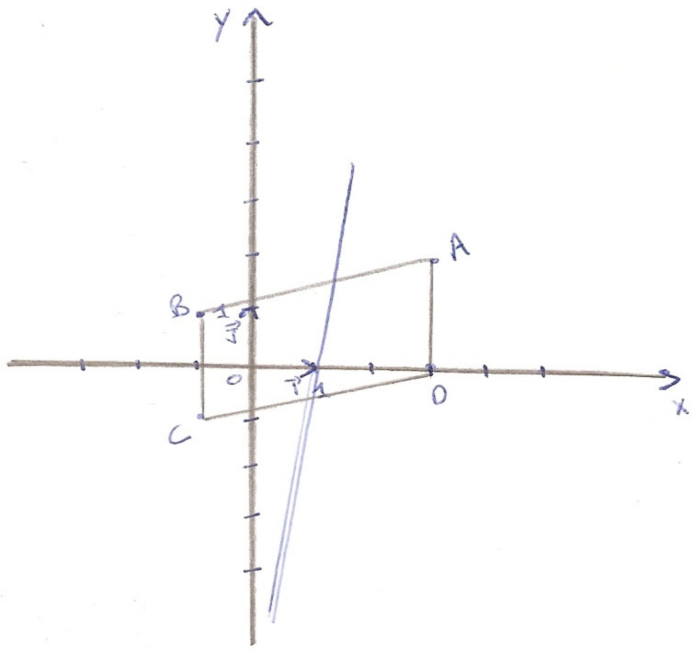
2. a) Pour placer les points A, B, C et D on a :

$Z_A = 3 + 2i \Rightarrow A(3, 2)$

$Z_B = -1 + i \Rightarrow B(-1, 1)$

$Z_C = -1 - i \Rightarrow C(-1, -1)$

$Z_D = 3 \Rightarrow D(3, 0)$



b). l'affixe du milieu de [AC] est égale à :

$$\frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{3 + 2i - 1 - i}{2} = \frac{2 + i}{2} = 1 + \frac{1}{2}i$$

• l'affixe du milieu [BD] est egale à :

$$\frac{Z_B + Z_D}{2} = \frac{3 - 1 + i}{2} = \frac{2 + i}{2} = 1 + \frac{1}{2}i$$

on constaté que les milieu des segments [AC] et [BD] ont la même affixe.

c) D'après le resultat précédent on deduit que les segments [AC] et [BD] ont le même milieu. Donc le quadrilatère ABCD est un parallelogramme.

d) soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z telleque $|z-3| = |z+1-i|$

Alors $M \in \Gamma \Leftrightarrow |Z_M - Z_D| = |Z_M - Z_B|$

$M \in \Gamma \Leftrightarrow MD = MB$

Alors Γ est la mediatrice du segment [BD].