http://maurimath.net/Espaceeleves.php

**Exercice corrigé** **Arithmétique**

**1) Trouvez, suivant les valeurs de l'entier naturel $n$, le reste de la division euclidienne de $4^n$ par 7.**
**2) Trouvez le reste de la division euclidienne de $2013^{2013}$ par 7.**
**3) Montrez que pour tout entier naturel $n$, $2008^{2n+1} + 2010^n$ est divisible par 7.**

NOM: Salma Mint Isselmou Kerbally
Elmaarif: 7C1

Exercice = 01

1) $4^0 = 1 \Rightarrow 4^0 \equiv 1\ [7]$
$4^1 = 4 \Rightarrow 4^1 \equiv 4\ [7]$
$4^2 = 16 \Rightarrow 4^2 \equiv 2\ [7]$ → Cycle de 3
$4^3 = 64 \Rightarrow 4^3 \equiv 1\ [7]$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4^{3k} \equiv 1\ [7] \\ 4^{3k+1} \equiv 4\ [7] \\ 4^{3k+2} \equiv 2\ [7] \end{cases}$$

En d'autres termes:

$$\text{Si } \begin{cases} n = 3k \Rightarrow 4^n \equiv 1\ [7] \\ n = 3k+1 \Rightarrow 4^n \equiv 4\ [7] \\ n = 3k+2 \Rightarrow 4^n \equiv 2\ [7] \end{cases}$$

2) On a: $2013 \equiv 4\ [7]$ car $2013 \,\underline{|\,7}$, reste 4, quotient 287

Alors $2013^{2013} \equiv 4^{2013}\ [7]$

- 2013 est divisible par 3
- 2013 est du type $3k$

$4^{2013} \equiv 4^{3k}\ [7]$

$4^{2013} \equiv 1\ [7]$

Donc $2013^{2013} \equiv 1\ [7]$

Le reste de la division euclidienne de $2013^{2013}$ par 7 est égal à 1.

3) On a $\begin{cases} 2008 \equiv 6\ [7] \\ 6 \equiv -1\ [7] \end{cases}$

Alors $2008 \equiv -1\ [7]$

$2008^{2n+1} \equiv (-1)^{2n+1}\ [7]$

Comme $2n+1$ est impaire donc $(-1)^{2n+1} = -1$.

$\Rightarrow \boxed{2008^{2n+1} \equiv -1\ [7]}$ 1

$2010 \equiv 1\ [7]$

$2010^n \equiv 1^n\ [7]$

$\boxed{2010^n \equiv 1\ [7]}$ 2

On additionne 1 et 2 :

$(2008^{2n+1} + 2010^n) \equiv -1+1\ [7]$

$\Rightarrow (2008^{2n+1} + 2010^n) \equiv 0\ [7]$

Donc $7 \mid (2008^{2n+1} + 2010^n)$.

Rappel:

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. les propositions suivantes sont équivalentes:

1) $a$ divise $b$; $a|b$
2) $a$ est un diviseur de $b$
3) $b$ est un multiple de $a$.
4) $b$ est divisible par $a$
5) $b \equiv 0\ [a]$
6) Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$
7) $PGCD(a,b) = a$
8) $PPCM(a,b) = b$.