Exercice 12 Bac 2016

On considère l'équation (E) : $5x - 3y = 17$, où x et y sont des entiers relatifs.

1.a) Justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple $(4,1)$ est une solution particulière de (E).

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2) Soit (x,y) une solution de (E).

a) Montrer que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 17.

b) Soit m un entier relatif. Trouver les valeurs de m telles que le quotient $\frac{1+5m}{4+3m}$ soit un entier relatif.

Nom : Dimbra / AllAf 7C, ERRAJa N = 1542

Solution de l'exercice 12 Bac 2016

$5x+3y=17$

1) $5\wedge3=1$ divise 17 alors (E) admet des solution dans $\mathbb{Z}^2$

On remplace par $(4,1)$:

$5\times4-3\times1=20-3=17$

alors $(4,1)$ est une solution particulier de (E)

b $\begin{cases} 5x-3y=17 \\ 5\times4-3\times1=17 \end{cases}$ / $5(x-4)-3(y-1)=0$

$5(x-4)=3(y-1)$

$5\wedge3=1$ D'aprés la théoreme de Gauss $\begin{cases} 3\mid(x-4) \\ 5\mid(y-1) \end{cases}$

$\Rightarrow$ il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel qu

$\begin{cases} x-4=3k \\ y-1=5k \end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases} x=4+3k \\ y=1+5k \end{cases}$

On verifie la reciproque

$5(4+3k)-3(1+5k)=20+15k-3-15k=17$

conclution :

l'ensemble de solution de (E)

$S\{(4+3k,1+5k)\}$ $k\in\mathbb{Z}$

2) (x,y) est une solution de (E) alors

$5x-3y=17$

Si $x\mid y$ alors $x\mid3y$

$\Rightarrow$ on sait que $x\mid(-3y+5x)$

Donc $x\mid17$

b) $\frac{1+5m}{4+3m}$ est un entier relatif

ssi $(4+3m)\mid(1+5m)$

$\Rightarrow(4+3m)\mid3(1+5m)-5(4+3m)$

$\Rightarrow(4+3m)\mid(17)$

$4+3m\in\{-17,-1,1,17\}$

$3m\in\{-21,-5,-3,13\}$

$3m\{-21,-3\}$ car -5 et 13 ne sont pas des multiple de 3

Donc $3m=-21$ ou $3m=3$

$m=7$ ou $m=1$

Pour vérification :

$m=-7\Rightarrow\frac{1+5m}{4+3m}=\frac{-3}{-17}=2\in\mathbb{Z}$

$m=1\Rightarrow\frac{1+5m}{4+3m}=\frac{-4}{1}=-4\in\mathbb{Z}$

Fin