Exercice **Bac 2016**

On considère l'équation (E) : $5x - 3y = 17$, où x et y sont des entiers relatifs.

1.a) Justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple $(4,1)$ est une solution particulière de (E).

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2) Soit (x, y) une solution de (E).

a) Montrer que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 17.

b) Soit m un entier relatif. Trouver les valeurs de m telles que le quotient $\frac{1+5m}{4+3m}$ soit un entier relatif.

Bac : 2016 | Khadijetou / oumar | 7 C1 Erraja

On considère l'équation (E) : $5x - 3y = 17$, où x et y sont des entiers relatifs. 1-a) justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple (4,1) est une solution particulière de (E).

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2) Soit (x, y) une solution de (E).

a) Montrer que si x est un diviseur de y, alors x est diviseur de 17.

b) Soit m un entier relatif. Trouver les valeurs de m tq le quotient $\frac{1+5m}{4+3m}$ soit $\in \mathbb{Z}$

Solution :

$5x - 3y = 17$

1-a : $5 \wedge 3 = 1$ divise 17.

Alors (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$

on remplace (4, 1) : $5\times4 - 3\times1 = 20 - 3 = 17$

Alors (4, 1) est une solution particulier de (E)

1-b :
$$\begin{cases} 5x - 3y = 17 \\ 5\times4 - 3\times1 = 17 \end{cases}$$

$5(x-4) - 3(y-1) = 0$

$5(x-4) = 3(y-1)$

$5 \wedge 3 = 1$, D'après le théorème de gauss :

$$\begin{cases} 3 / (x-4) \\ 5 / (y-1) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq
$$\begin{cases} x - 4 = 3k \\ y - 1 = 5k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + 3k \\ y = 1 + 5k \end{cases}$$

On vérifie la réciproque :

$5(4+3k)-3(1+5k)=$
$20+15k-3-15k=17$

Conclusion:

L'ensemble de solution de (E)

$S=\{(4+3k,\ 1+5k)\}$
$k\in\mathbb{Z}$

2-a: (x,y) est une solution de (E)
Alors $5x-3y=17$
Si $x|y$ alors $x/3y$
$\Rightarrow$ on sait que
$x/(-3y+5x)$
car $(x/5x)$
Donc $x/17$

2-b: $\dfrac{1+5m}{4+3m}$ est de type $\dfrac{y}{x}$.

$\dfrac{1+5m}{4+3m}\in\mathbb{Z}$

ssi $(4+3m)/(3(1+5m)-5(4+3m))$

$\Rightarrow(4+3m)/(17)$

$4+3m\in\{-17,-1,1,17\}$

$3m\in\{-21,-5,-3,13\}$

$3m\in\{-21,-3\}$ car -5 et 13 ne sont pas de multiples de 3

Donc $3m=-21$ ou $3m=-3$

$\boxed{m=-7 \text{ ou } m=-1}$

Pour vérifier :

$m=-7$	$m=-1$
$\dfrac{1+5m}{4+3m}=\dfrac{-34}{-17}=2\in\mathbb{Z}$	$\dfrac{1+5m}{4+3m}=-4\in\mathbb{Z}$