Nom: Mohamed ould mohamed mokhtar
N: 1456
7C

Baccalauréat 2014 (Session Normale)

Exercice ①:

$P(z) = z^3 + (1-2i)z^2 + (1-2i)z - 2i$

1) $P(2i) = (2i)^3 + (1-2i)(2i)^2 + (1-2i)(2i) - 2i$

$= -8i - 4(1-2i) + 2i(1-2i) - 2i$

$= \cancel{-8i} \cancel{-4} + \cancel{8i} \cancel{+2i} \cancel{+4} \cancel{-2i}$

$P(2i) = 0$

	1	$1-2i$	$1-2i$	$-2i$
$2i$	↓	$2i$	$2i$	$2i$
	1	1	1	0

$\forall z \in \mathbb{C}$; $P(z) = (z-2i)(z^2+z+1)$

$P(z) = 0 \iff (z-2i)(z^2+z+1) = 0$

$\iff z = 2i$ ou $z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$

$z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z'' = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S = \left\{2i ; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$Im(2i) \geq Im\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \geq Im\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

: $z_0 = 2i$; $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) a) On a : $B\left(-\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Soit $M(x;y)$

$M \in (BC) \iff \det(\vec{BM}, \vec{BC}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} x+1/2 & 0 \\ y-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$

$\sqrt{3}(x + 1/$ [illegible]

b) $M \in (BC) \setminus \{B ; C\}$

$\iff z = -\frac{1}{2} + iy \;/\; y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

On a : $z' = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{1}{(z+1/2)^2 + 3/4}$

D'où $z' = \frac{1}{(-\frac{1}{2} + iy + 1/2)^2 + 3/4} = \frac{1}{(iy)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{-y^2 + \frac{3}{4}}$

$z' \in \mathbb{R}$ Donc M' est sur l'axe des abscisses

3) a) $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z^2 + \bar{z}z + \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{(\bar{z}z)z + \bar{z}}$

Donc si $|z| = 1$ alors $|z|^2 = 1$

d'où : $f(z) = \frac{\bar{z}}{z + 1 + \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{1 + z + \bar{z}}$

b) Si $z = e^{i\theta}$ alors $\bar{z} = e^{-i\theta}$ et $|z| = 1$

Donc : $f(z) = \frac{e^{-i\theta}}{1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1 + 2\cos\theta}$

4) a) $M \in \mathcal{C}(O;1) \setminus \{B;C\} \iff z = e^{i\theta}$

$\implies z' = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

$\implies \begin{cases} x' = \frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ y' = \frac{-\sin\theta}{1+2\cos\theta} \end{cases}$

$\implies \begin{cases} x'^2 + y'^2 = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{(1+2\cos\theta)^2} = \frac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \\ \text{et} \\ (2x'-1)^2 = \left(\frac{2\cos\theta}{1+2\cos\theta} - 1\right)^2 = \frac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \end{cases}$

D'où : $x'^2 + y'^2 = (2x'-1)^2$

b) Γ : $x^2 + y^2 = (2x-1)^2$

$\iff x^2 + y^2 = 4x^2 - 4x + 1$

$\iff 3x^2 - 4x - y^2 = -1$

$\iff 3\left(x^2 - \frac{4x}{3}\right) - y^2 = -1$

$\iff 3\left[\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - \frac{4}{9}\right] - y^2$ [illegible]

$\Leftrightarrow 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{3}$

$$\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{1/9} - \frac{y^2}{1/3} = 1$$

1) $\Gamma : \dfrac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{3}/3\right)^2} = 1$

$\therefore \Gamma : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \dfrac{1}{3}$

et $b = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

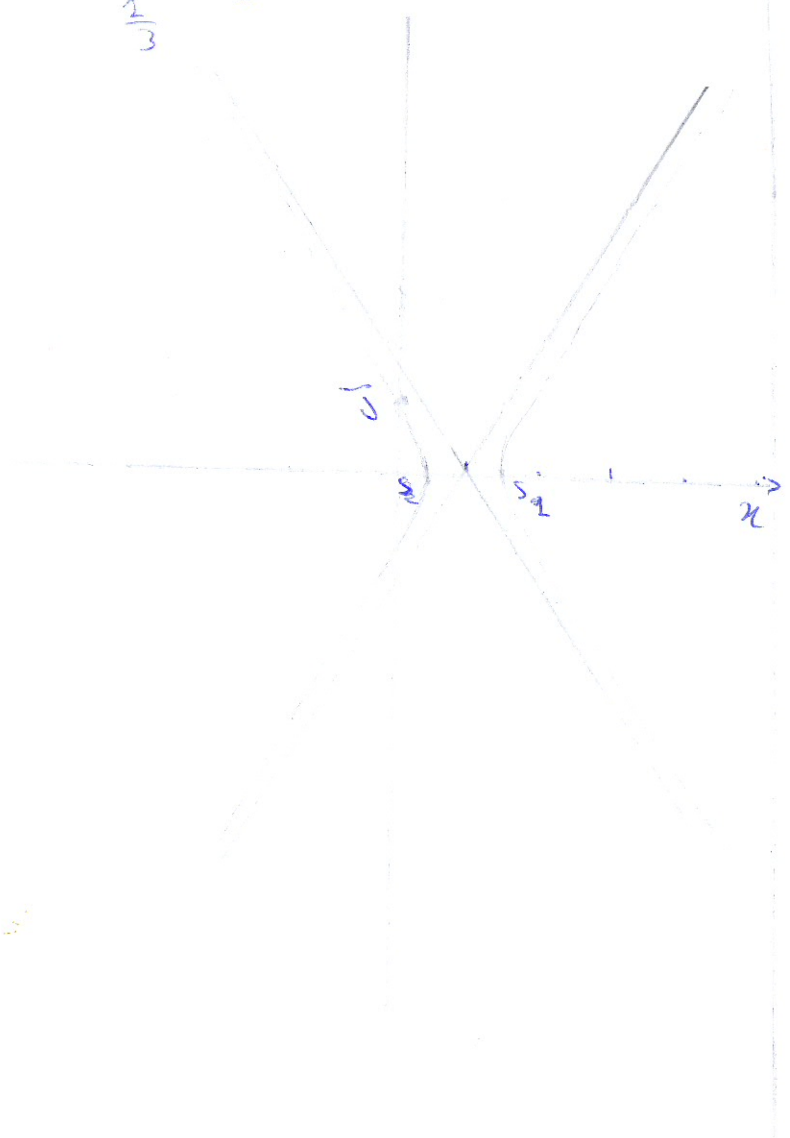
Donc Γ est une hyperbole de centre $\Omega\left(\frac{2}{3};0\right)$ et de sommets :

$S_1 : \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3};0\right) = (1;0)$

$S_2 : \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3};0\right) = \left(\frac{1}{3};0\right)$

dans le repère d'excentricité $e = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

$e = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$



Na: Mohamed ould mohamed moukhtar
N: 1456
7C

Baccalauréat 2014 session normale

Exercice ②:

1)
a) $f(x) = xe^x$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

st continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$

$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

le signe de $f'(x)$ st celui de $x+1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

T.V de f

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

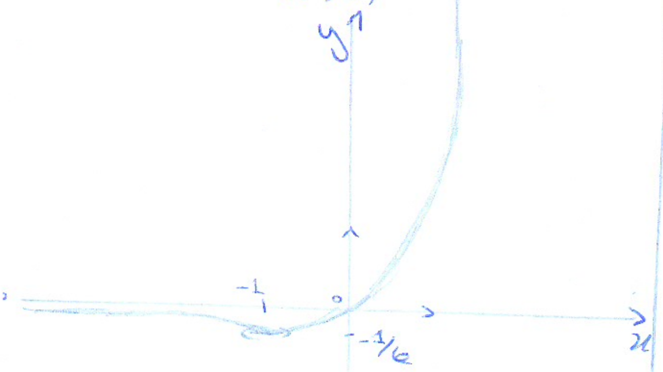
$y = 0$: A.H à (C) au voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

(C) admet une B.P // $(y'y)$ au voisinage de $+\infty$

* $C \cap (y'y)$: $(0, 0)$

$C \cap (x'x)$: $(0, 0)$



1)
c) $f(x) = xe^x$; $f'(x) = (x+1)e^x$, $f''(x) = (x+2)e^x$

$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = (x+2)e^x - 2(x+1)e^x + xe^x = (x+2-2x-2+x)e^x = 0$

Donc : f st une solution de l'equation differentielle $y'' - 2y' + y = 0$

d) L'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droits d'equations $x=0$ et $x=1$ st $A = \int_0^1 |f(x)|dx$

On : $\forall x \in [0,1]$; $f(x) \geq 0$

D'où : $A = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xe^x dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

Alors $A = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$

$= [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1$

$= [xe^x - e^x]_0^1$

$\boxed{A = 1\ ua}$

2) a) $I_1 = (-1)^1 \int_0^1 xe^x dx$

On : $\int_0^1 xe^x dx = 1$

D'où $\boxed{I_1 = -1}$

b) $I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x dx$

Donc : $|I_n| = |(-1)^n| \left|\int_0^1 x^n e^x dx\right|$

$= 1 \times \left|\int_0^1 x^n e^x dx\right|$

On : $\forall x \in [0,1]$, $x^n e^x \geq 0$ D'où : $\int_0^1 x^n e^x dx \geq 0$

Donc : $\left|\int_0^1 x^n e^x dx\right| = \int_0^1 x^n e^x dx$

D'où $|I_n| = \int_0^1 x^n e^x dx$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e \Rightarrow x^n \leq x^n e^x \leq e.x^n \Rightarrow \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq e.\int_0^1 x^n dx$

$\Rightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq |I_n| \leq e.\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$(\forall n \geq 1 ;\ \frac{1}{} \leq |I_n| \leq e$

Exercice ② (suite)

b)

$\forall n \geq 1 \; ; \; \frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}$

or : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

d'où d'après le T.G. $\lim_{n \to +\infty} |I_n| = 0$

donc $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

c)

$I_{n+1} = (-1)^{n+1} \int_0^1 x^{n+1} e^x \, dx$

on pose $\begin{cases} U(x) = x^{n+1} \\ V'(x) = e^x \end{cases}$ Alors $\begin{cases} U'(x) = (n+1) x^n \\ V(x) = e^x \end{cases}$

$I_{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\left[x^{n+1} e^x \right]_0^1 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x \, dx \right)$

$= (-1)^{n+1} \left(e - 0 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x \, dx \right)$

$= (-1)^{n+1} e - (-1)^{n+1} (n+1) \int_0^1 x^n e^x \, dx$

$= (-1)^{n+1} e - (-1)(-1)^n (n+1) \int_0^1 x^n e^x \, dx$

$= (-1)^{n+1} e + (n+1)(-1)^n \int_0^1 x^n e^x \, dx$

$\boxed{I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1) I_n \, , \; \forall n \geq 1}$

3)

a) $J = \int_0^1 \frac{(x^3 + 4x^2 - 3x - 6) e^x}{x+1} \, dx$

	1	4	−3	−6
−1	↓	−1	−3	6
	1	3	−6	0

$\therefore J = \int_0^1 \frac{(x^2 + 3x - 6)\cancel{(x+1)} e^x}{\cancel{(x+1)}} \, dx$

$= \int_0^1 (x^2 + 3x - 6) e^x \, dx$

$= \int_0^1 x^2 e^x \, dx + 3 \int_0^1 x e^x \, dx - 6 \int_0^1 e^x \, dx$

$= (-1)^2 \int_0^1 x^2 e^x \, dx - 3 \times (-1) \int_0^1 x e^x \, dx - 6 \left[e^x \right]_0^1$

$J = I_2 - 3 I_1 - 6(e - 1)$

or : $I_1 = -1$; $I_2 = (-1)^2 e + 2 I_1 = e - 2$

D'où $J = (e - 2) - 3(-1) - 6(e - 1)$

$= e - 2 + 3 - 6e + 6$

$\boxed{J = 7 - 5e}$

Nom: Mohamed ould mohamed mokhtar
N: 1456
7C

Baccalauréat 2014 Session Normale

Exercice 3:

1)
a)
On a $f(0)=0$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
$= \lim_{x\to 0^+} x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$
$= \lim_{x\to 0^+} x(\ln(1+x) - \ln x)$
$= \lim_{x\to 0^+} (x\ln(x+1) - x\ln x)$
$= 0 - 0$
$= 0$

Donc: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ D'où f est continue à droite en 0

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 0}{x-0}$
$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$

f n'est donc pas dérivable à droite en 0
la courbe C de f admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty}\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\to 0}$ F.I

On pose $x = \frac{1}{t}$ $t = \frac{1}{x}$
alors $\lim_{x\to +\infty} t = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et $x = \frac{1}{t}$
$\lim_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1}$

Donc: $y=1$, A.H à C_f au voisinage de $+\infty$

$\forall x>0$, $f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)$
$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = \left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{(x+1)^2}$

$f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$
$= \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2}$

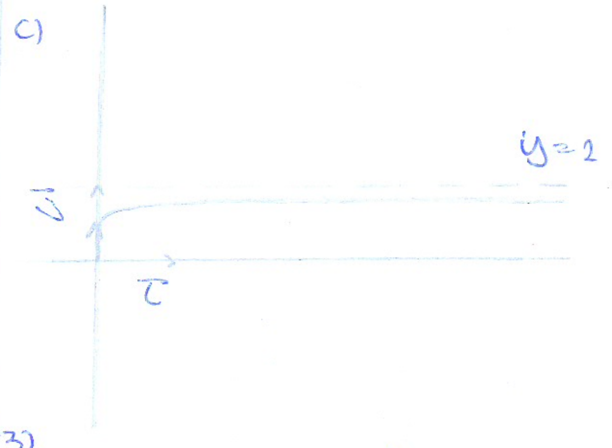
$\boxed{f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}}$

$f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$, $\forall x>0$ Donc f' est ↘ sur $]0;+\infty[$
Or $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) = 0 - 0 = 0$
D'où: $\forall x>0$, $f'(x) > 0$

b) T.V de f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	
$f(x)$	0	↗	1

c)



3)
a) Pour que A_n existe il suffit que f_n soit continue sur $[0;1]$
Montrons que f_n est continue sur $[0;1]$
- sur $]0;1]$ f_n est le produit de deux fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ continue sur $]0;1]$ d'où
f_n est continue sur $]0;1]$
* Etudions la continuité de f_n à droite en 0.
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^n\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} (x^n\ln(x+1) - x^n\ln x) = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = f_n(0)$

D'où f_n est continue à droite en 0 Donc f_n est continue sur $[0;1]$ et l'intégrale $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ existe et cette écriture définie bien une suite numérique

b) D'après le T.V de la fonction f définie dans la question (1) on a :

$\forall x \geq 0$; $0 \leq f(x) < 1$

d'où : en multipliant par x^{n-1}

on a : $\forall x \in [0;1]$, $0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$

or $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

et : $\forall x \in [0;1]$, $f_n(x) = x^{n-1} f(x)$

D'où $\forall x \in [0;1]$, $0 \leq f_n(x) \leq x^{n-1}$

Donc : $0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 x^{n-1}\,dx$

D'où : $0 \leq A_n \leq \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1$

Donc : $\boxed{\forall n \geq 1,\ 0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}}$

or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où d'après le T.G

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n = 0}$$

II) a) $I_n(t) = \int_t^1 x^n \ln x\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^n \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$

$\therefore I_n(t) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_t^1 - \frac{1}{n+1}\int_t^1 x^n\,dx$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_t^1 - \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_t^1$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_t^1$

$= 0 - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t + \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}$

$$\boxed{\therefore I_n(t) = \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t) - \frac{1}{(n+1)^2}}$$

b) $\lim_{t\to 0^+} I_n(t) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{t^n(t\ln t)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$= 0 - 0 \times 0 - \frac{1}{(n+1)^2}$

$$\boxed{\therefore \lim_{t\to 0^+} I_n(t) = \frac{-1}{(n+1)^2}}$$

c)

$J_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \ln(x+1) \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \end{cases}$

on obtient $v(x)$ en utilisant une I.P.P

$\therefore J_{n+1} = \left[x^{n+1}\left((x+1)\ln(x+1) - x\right)\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n\left((x+1)\ln(x+1) - x\right)dx$

$= 2\ln 2 - 1 - 0 - (n+1)\int_0^1 (x^{n+1} + x^n)\ln(x+1)\,dx + (n+1)\int_0^1 x^{n+1}\,dx$

$= 2\ln 2 - (n+1)\int_0^1 \left(x^{n+1}\ln(x+1) + x^n\ln(x+1)\right)dx + (n+1)\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 -$

$= 2\ln 2 - (n+1)\left(\int_0^1 x^{n+1}\ln x\,dx + \int_0^1 x^n\ln(x+1)\,dx\right) + (n+1)\left(\frac{1}{n+2} - 0\right) - 1$

$= 2\ln 2 - (n+1)J_{n+1} - (n+1)J_n + \frac{n+1}{n+2} - 1$

$J_{n+1} = 2\ln 2 - (n+1)J_{n+1} - (n+1)J_n - \frac{1}{n+2}$

$\therefore J_{n+1} + (n+1)J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1)J_n$

$(n+2)J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1)J_n$

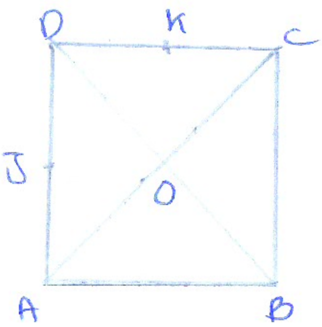
$$\boxed{\therefore J_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2}J_n}$$

Nom: Mohamed ould mohamed mokhtar
N: 1457
7 C

Baccalauréat 2014 session normale

Exercice(4) : Partie A

1)



2) Comme $BL^2 = BA^2 + AL^2 = a^2 + (\frac{a}{2})^2$
$= a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$
et $AK^2 = AD^2 + DK^2 = a^2 + (\frac{a}{2})^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}$
$= \frac{5a^2}{4}$
Donc $BL = AK \neq 0$
D'autre part : $(\vec{AK}, \vec{BL}) \neq 0 \ [2\pi]$
Donc, il existe une unique rotation r qui transforme A en B et K en L. Et comme méd$[AB] = (OK)$ et méd$[KL] = (BD)$
et $(OK) \cap (BD) = \{O\}$
le centre de r est donc le point O
l'angle de r est $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \pi/2 \ [2\pi]$

3)
a) Comme $B \neq D$ et $L \neq O$ il existe donc une unique similitude directe f_1 qui transforme D en L et B en O.
Le rapport de f_1 est $\frac{OL}{BD} = \frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
$= \frac{\sqrt{2}}{4}$
et un angle de f_1 est $(\vec{BD}, \vec{OL}) = \pi/4 \ [2\pi]$
Comme $f_1(P) = P$ et $f_1(B) = O$
on a donc : $(\vec{PB}, \vec{PO}) = \pi/4 \ [2\pi]$
et $(\vec{AB}, \vec{AO}) = \pi/4 \ [2\pi]$
Donc D'où $(\vec{PB}, \vec{PO}) = (\vec{AB}, \vec{AO}) = \pi/4$
Donc le point P appartient au cercle circonscrit au triangle OAB

c'est-à-dire que P appartient au cercle de diamètre [AB].
De même : comme $f_1(P) = P$ et $f_1(D) = L$
on a $(\vec{PD}, \vec{PL}) = \pi/4 \ [2\pi]$
Or $(\vec{OD}, \vec{OL}) = \pi/4 \ [2\pi]$
D'où : $(\vec{PD}, \vec{PL}) = (\vec{OD}, \vec{OL}) = \pi/4$
D'où le point P appartient au cercle circonscrit au triangle ODL c'est-à-dire que P appartient au cercle de diamètre [OD]. On constate que le point O est commun aux cercles de diamètres [AB] et [OD] mais qu'il n'est pas le centre de f_1 car $f_1^{-1}(O) = B \neq O$, le point P est donc le second point commun à ces deux cercles (autre que O)

3)
b)
Montrons que P est le point d'intersection de (BL) et (AK)
$(\vec{PB}, \vec{PL}) = (\vec{PB}, \vec{PO}) + (\vec{PO}, \vec{PL})$
$= (\vec{AB}, \vec{AO}) + (\vec{DB}, \vec{DL}) \ [\pi]$
$(\vec{PB}, \vec{PL}) = \pi/4 - \pi/4 = 0 \ [\pi]$
donc $P \in (BL)$
De même :
$(\vec{PA}, \vec{PK}) = (\vec{PA}, \vec{PO}) + (\vec{PO}, \vec{PK})$
$= (\vec{BA}, \vec{BO}) + (\vec{DO}, \vec{DK}) \ [\pi]$
$(\vec{PA}, \vec{PK}) = -\pi/4 + \pi/4 = 0 \ [\pi]$
Donc $P \in (AK)$
P est donc le point d'intersection de (BL) et (AK)

4) Comme $f_2(B) = D$ et $f_2(O) = L$
Un angle de f_2 est : $(\vec{BO}, \vec{DL}) = (\vec{BO}, \vec{DB}) + (\vec{DB}, \vec{DL})$
$= \pi - \pi/4 = \frac{3\pi}{4} \ [2\pi]$
Et le rapport de f_2 est : $\frac{DL}{BO} = \frac{a/2}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

4)
b)
$f_2 \circ f_1$ et $f_1 \circ f_2$ sont deux similitude directs de même rapport et de même angle et transforment le point B en un même point L car $f_2 \circ f_1(B) = f_2(f_1(B)) = f_2(D) = L$
et $f_1 \circ f_2(B) = f_1(f_2(B)) = f_1(D) = L$
Donc $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$
le centre de f_2 st donc celui de f_1 c'st-à-dire le point P.

5a) $h = f_1 \circ f_2$ st la composée de deux similitudes directes dont le produit des rapports st $\frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} (\neq 1)$ et dont la somme des angles st $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi\ [2\pi]$ et ayant même centre P d'où h st une homothétie de centre P et de rapport $-\frac{1}{4}$.
On: $h(P) = f_1 \circ f_2(B) = f_1(f_2(B)) = f_1(D) = L$
d'où $\vec{PL} = -\frac{1}{4}\vec{PB}$
Donc $4\vec{PL} + \vec{PB} = \vec{0}$
D'où : $P = \text{bar} \begin{vmatrix} B & L \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$
$\Rightarrow P = \text{bar} \begin{vmatrix} B & D & A \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$
On $B = \text{bar} \begin{vmatrix} A & C & D \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
D'où $P = \text{bar} \begin{vmatrix} A & C & D & D & A \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$
$\Rightarrow P = \text{bar} \begin{vmatrix} A & C & D \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
$\Rightarrow P = \text{bar} \begin{vmatrix} A & K \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

Partie B :

1) $r = S_1 \circ S_2$ st la composeè de deux reflexions de plans perpendiculaires dont la droite d'intersection st (AD)
D'où : r st le demi-tour d'axe (AD).

2)
$t = S_3 \circ S_4$ st composeè de deux reflexions de plans parallèls D'où t st une translation le vecteur de t st : $2\vec{OA}$

3) $f = r \circ t$ st composeè d'une translation et d'une rotation telles que le vecteur de la translation st un vecteur directeur de l'axe de la rotation. D'où : f st le vissage d'axe (OA), d'angle π et de vecteur $2\vec{OA}$.