Nevisse Mnt Lemrabott

Baccalauréat 2015

Session Normale

Exercice 3 :

$f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

1-a) • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim \dfrac{1}{1+e^x} = 1$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 0$

Interprétation graphique :

$\mathcal{C}_f$ admet Une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au Voisinage de $(+\infty)$

$\mathcal{C}_f$ admet Une asymptote horizontale d'équation $y=1$ au Voisinage de $(-\infty)$

)* $f'(x) = \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}$ $f'(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

f est Strictement décroissante Sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

)* f est continue, et Strictement décroissante $f(\mathbb{R}) =]0,1[$

Alors $f : \mathbb{R} \to]0,1[$ est bijective

$J =]0,1[$

Pour exprimer $f^{-1}(x)$, On Pose $y = f(x)$

On a : $y = \dfrac{1}{1+e^x} \iff y(1+e^x) = 1$

$y + ye^x = 1 \iff ye^x = 1 - y$

$\iff e^x = \dfrac{1-y}{y} \iff x = \ln\left(\dfrac{1-y}{y}\right)$

D'où : $f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{x}\right)$, $x \in]0,1[$

2-a)* $f(2a-x) + f(x) = 2b$ avec : $(a,b) = (0, \frac{1}{2})$

On a : $f(2a-x) = f(-x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}} \times \dfrac{e^x}{e^x} = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

Donc : $f(-x) + f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} + \dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{e^x+1}{e^x+1} =$

$= 2 \times \frac{1}{2} = 2b$

D'où $\Omega(0, \frac{1}{2})$ est Un centre de Symétrie de la courb $\mathcal{C}$

b)* les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ Sont Symétriques par Rapport à la droite $y = x$

S'il Se coupent en Un point d'abscisse x, alors x Vérifie $f(x) = x$, Soit $f(x) - x = 0$ On pose $v(x) = f(x) - x$

$v'(x) = f'(x) - 1$

$v'(x) = \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2} - 1 = -\left(1 + \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}\right)$

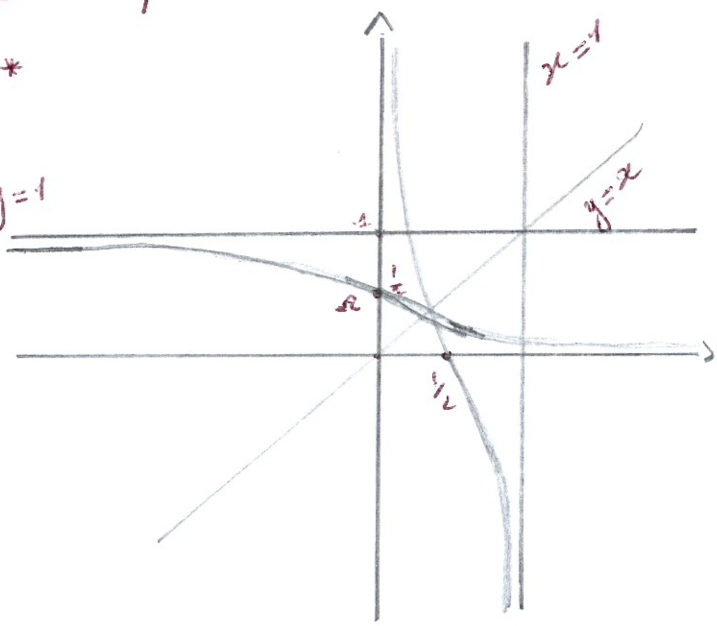
il est clair que pour tout x de $\mathbb{R}$ $v'(x) < 0$. D'où v est Strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

On a : $\begin{cases} \varphi(0,4) = 1,3.10^{-3} > 0 \\ \varphi(0,5) = -0,12 < 0 \end{cases}$

Donc $\varphi(0,4) \times \varphi(0,5) < 0$. D'après le Théorème des valeurs intermédiaires l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution α telle que $0,4 < \alpha < 0,5$. (φ est continue sur $[0,4 ; 0,5]$ et change de signe)

D'après le Théorème de la bijection réciproque (φ est continue est strictement monotone) la solution α est unique.

c)*



d)* Par symétrie, l'aire cherchée A est égale au double de l'aire comprise entre $(\mathcal{C})$, la droite $y = x$ et les droites verticales d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$ (l'axe Oy)

$$A = 2\int_0^\alpha (f(x) - x)\,dx$$

$$A = 2\int_0^\alpha \left(\frac{1}{e^x+1} - x\right)dx$$

$$A = 2\int_0^\alpha \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} - x\right)dx$$

$$A = -2\int_0^\alpha \left(\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} + x\right)dx$$

$$A = -2\left[\ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{2}x^2\right]_0^\alpha$$

$$A = -2\left(\ln(1+e^{-\alpha}) + \frac{1}{2}\alpha^2 - \ln 2\right)$$

$$A = -2\ln(1+e^{-\alpha}) - \alpha^2 + 2\ln 2$$

$$A = -2\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{2}\right) - \alpha^2$$

$$A = 2\ln\left(\frac{2e^\alpha}{1+e^\alpha}\right) - \alpha^2 \text{ U.a}$$

3)* $I_n = \int_0^\alpha f^n(t)\,dt$

a)* $I_1 = \int_0^\alpha f(t)\,dt$

$$I_1 = \int_0^\alpha \frac{1}{1+e^t}\,dt$$

$$I_1 = \int_0^\alpha \frac{e^{-t}}{e^{-t}+1}\,dt$$

$$I_1 = -\int_0^\alpha \frac{-e^{-t}}{e^{-t}+1}\,dt$$

$$I_1 = -\left[\ln(e^{-t}+1)\right]_0^\alpha$$

$$I_1 = -\ln(e^{-\alpha}+1) + \ln 2$$

Nevisse Mnt Lemrabott

Baccalauréat 2015

Session Normale

Exercice 1, Suite:

• Pour $K=1$, $\Omega_1 = G_1 = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 2 & -2 & 2 \end{array}$

c'est le quatrième Sommet du parallélogramme $ABCG_1$.

avec : $\begin{cases} x_1 = \frac{14}{2} = 7 \\ y_1 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$ D'où $\Omega_1(7,2)$

d)* L'affixe de M' est :

$z' = (K-2)Z + 20 - 6K + (8-4K)i$

Pour $K=1$.

On a $Z' = -Z + 14 + 4i$

Alors l'affixe du point R centre de gravité du triangle AMM' est

$Z_R = \frac{Z_A + Z + Z'}{3} = \frac{3 + \cancel{Z} \cancel{-Z} + 14 + 4i}{3}$

$Z_R = \frac{17}{3} + \frac{4i}{3}$, Alors lorsque M décrit le cercle Γ de centre G passant par C, le Point R reste fixe.

3)* $\mathcal{E}(M) = 2MA^2 - 2MB^2 + 2MC^2$

$\mathcal{E}(M) = m$, où $m \in \mathbb{R}$

La somme des coefficient $\neq 0$

Le barycentre de ce systèmes est le point $\Omega_1(7,2)$.

Par transformation d'écriture on obtient la forme Réduite.

$\mathcal{E}(M) = 2MG^2 + \mathcal{E}(G)$

Donc $M \in \Gamma_m \iff 2MG^2 + \mathcal{E}(G) = m$

Soit $MG^2 = \frac{m - \mathcal{E}(G)}{2}$

calculons $\mathcal{E}(G)$:

$\mathcal{E}(G) = 2GA^2 - 2GB^2 + 2GC^2$

Donc : $GA^2 = |Z_A - Z_G|^2 = |3 - 7 - 2i|^2 = 20$

$GB^2 = |Z_B - Z_G|^2 = |2 + 2i - 7 - 2i|^2 = 25$

$GC^2 = |Z_C - Z_G|^2 = |6 + 4i - 7 - 2i|^2 = 5$

Alors : $\mathcal{E}(G) = 2GA^2 - 2GB^2 + 2GC^2$
$= 2\times 20 - 2\times 25 + 2\times 5$

$\mathcal{E}(G) = 0$

D'où $M \in \Gamma_m \iff MG^2 = \frac{m}{2}$

Si :

- $m < 0$: Γ_m est l'ensemble Vide
- $m = 0$: Γ_m est le Point G
- $m > 0$: Γ_m est le cercle de

b) + D'aprés des Résultats précedentes :
Pour $m = 10$: l'ensemble est Un cercle de centre G et de Rayon $r = \sqrt{\frac{m}{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}$

et comme $GC^2 = 5$, ce cercle passe par C. Donc Γ_{10} est le cercle de centre G passant par C.

Nevisse Mnt Lemrabott

Baccalauréat 2015

Session Normale

Exercice 1 :

1-a)* $P(Z) = Z^3 - (11+6i)Z^2 + (28+38i)Z - 12 - 60i$

$P(3) = 3^3 - (11+6i)3^2 + (28+38i)3 - 12 - 60i$

$P(3) = \cancel{27} - \cancel{27} + \cancel{114i} - \cancel{114i}$

$\Rightarrow P(3) = 0$

$P(Z) = (Z-3)(Z^2 + aZ + b)$

T.H :

	1	$-11-6i$	$28+38i$	$-12-60i$
3	↓	3	$-24-18i$	$12+60i$
	1	$-8-6i$	$4+20i$	$0+0$

$P(Z) = (Z-3)(Z^2 - (8+6i)Z + 4 + 20i)$

b)* $P(Z) = 0 \Rightarrow (Z-3)(Z^2 - (8+6i)Z + 4 + 20i) = 0$

$\Rightarrow Z - 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{Z_0 = 3}$ ou $Z^2 - (8+6i)Z + 4 + 20i = 0$

$\Delta = 12 + 16i = (4+2i)^2 \Rightarrow \delta = 4 + 2i$

$Z = \frac{8+6i+4+2i}{2} = 6 + 4i$

$Z = \frac{8+6i-4-2i}{2} = 2 + 2i$

$S = \{3 ; 6+4i ; 2+2i\}$

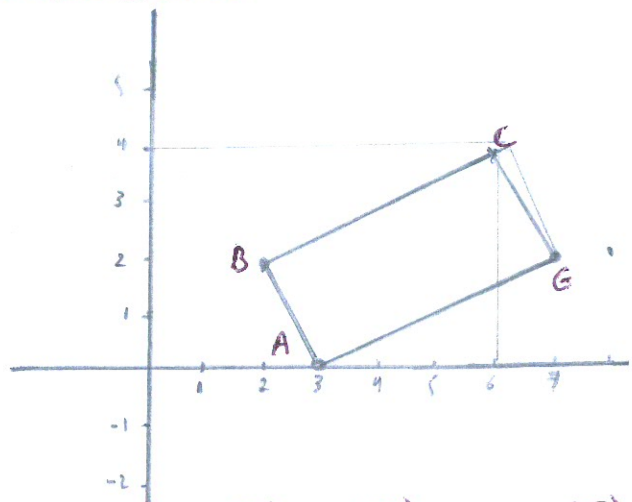
c)* $Z_A = 3$; $Z_B = 2 + 2i$; $Z_C = 6 + 4i$

$G = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 2 & -2 & 2 \end{array}$

$Z_G = \frac{2Z_A - 2Z_B + 2Z_C}{2 - 2 + 2}$

$= \frac{2(3) - 2(2+2i) + 2(6+4i)}{2}$

$\boxed{Z_G = 7 + 2i}$



2)* $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-K)\overrightarrow{MC}$

Par Methode : Nombres complexes

$Z' - Z = 2(Z_A - Z) - 2(Z_B - Z) + (3-K)(Z_C - Z)$

$Z' - Z = 2(3 - Z) - 2(2 + 2i - Z) + (3-K)(6 + 4i - Z)$

$Z' = Z + 6 - 2Z - 4 - 4i + 2Z + 18 - 6K + 12i - 4Ki - (3-K)Z$

$Z' = (K-2)Z + 20 - 6K + (8 - 4K)$

Une expression de Type $z' = az + b$

avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$

Si $K = 3$, On a : $z' = z + 2 - 4i$

donc f_3 est Une translation dont de Vecteur a pour affixe $2 - 4i$

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) * Si $K \in \mathbb{R}/\{2,3\}$, alors :

$K - 2 \neq 0$ et $K - 2 \neq 1$

des points invariant Sont d'affixes z Vérifiant $z' = z$

$\Rightarrow z = (K-2)z + 20 - 6K + (8-4K)i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{20 - 6K + (8-4K)i}{3 - K}$

D'où f_K admet Un Unique point invariant Ω_K d'affixe :

$z_K = \dfrac{20 - 6K + (8-4K)i}{3 - K}$

D'aprés la forme complexe

$z' = (K-2)z + 20 - 6K + (8-4K)i$

f_K est l'homothétie de centre Ω_K et de Rapport $K - 2$.

c) * l'affixe de Ω_K est :

$z_K = \dfrac{20 - 6K + (8-4K)i}{3 - K} \Rightarrow$

$\begin{cases} x_K = \dfrac{20 - 6K}{3 - K} = \dfrac{6K - 20}{K - 3} \\ y_K = \dfrac{8 - 4K}{3 - K} = \dfrac{4K - 8}{K - 3} \end{cases}$

$\begin{cases} x_K = 6 - \dfrac{2}{K - 3} \\ y_K = 4 + \dfrac{4}{K - 3} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + y - 16 = 0$

c'est d'équation d'Une droite

comme $(x_K, y_K) = \left(6 - \dfrac{2}{K-3} ; 4 + \dfrac{4}{K-3}\right)$

avec $\dfrac{2}{K-3} \neq 0$ et $\dfrac{4}{K-3} \neq 0$

On a alors $(x_K, y_K) \neq (6,4)$

D'où $\Omega_K \neq C(6,4)$

comme $K \neq 2$, On a $(x_K, y_K) \neq (x_2, y_2)$

$\neq \left(6 - \dfrac{2}{2-3} ; 4 + \dfrac{4}{2-3}\right) \Rightarrow$

$(x_K, y_K) \neq (8,0)$ donc $\Omega_K \neq G_2(8,0)$

conclusion : le lieu géométrique des points Ω_K lorsque $K \in \mathbb{R}/\{2,3\}$ est la droite D d'equation :

$2x + y - 16 = 0$ privée de $C(6,4)$ et $G_2(8,0)$.

Nom : Nevisse Mnt Lemrabott

Baccalauréat 2015

S. N

Exercice 4 : (Suite)

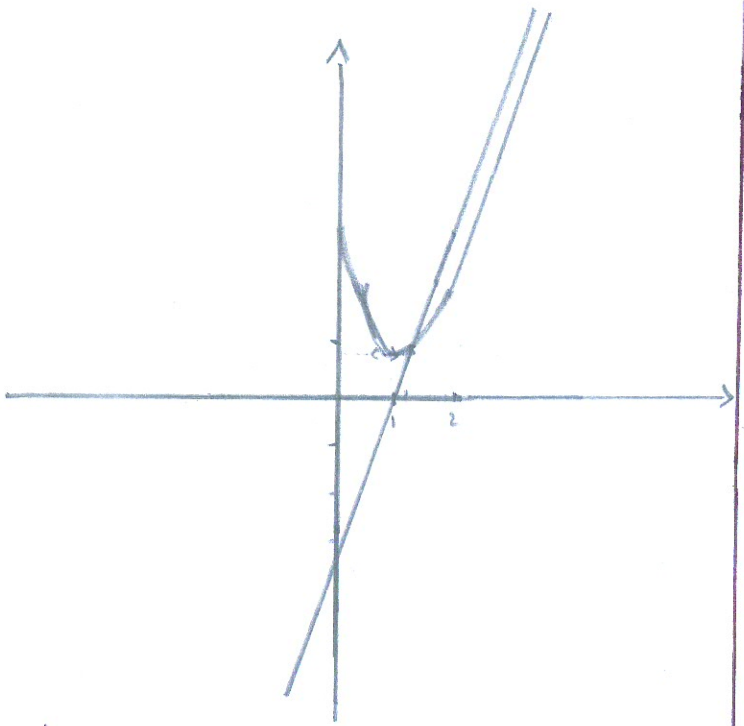
Pour encadrer α :

$$\begin{cases} f(-1) = -6 + \ln 10 < 0 \\ \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow -1 < \alpha < 0$$

$$\begin{cases} f(-0{,}5) = -4{,}5 + \ln 29 < 0 \\ \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow -0{,}5 < \alpha < 0$$

c'est un encadrement de α d'amplitude de 5.10^{-1}.

)* La courbe $(\mathcal{C})$:



-a)*

$$2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2}\right) =$$

$$2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+x^2-4x+4}\right) =$$

$$2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{x^2-4x+5}\right)$$

$$= 2\left(1 + \frac{2x-4-1}{x^2-4x+5}\right)$$

$$= 2\left(\frac{x^2-4x+\cancel{5}+2x-\cancel{5}}{x^2-4x+5}\right)$$

$$= 2\left(\frac{x^2-2x}{x^2-4x+5}\right) = \frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}$$

Alors :

$$\frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5} = 2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2}\right)$$

b)* $A = \displaystyle\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx$

$$A = \Big[\ln|x^2-4x+5|\Big]_3^{2+\sqrt{3}}$$

$$A = \ln|(2+\sqrt{3})^2 - 4(2+\sqrt{3}) + 5| - \ln|3^2 - 4\times 3 + 5|$$

$$A = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2 \Rightarrow \boxed{A = \ln 2}$$

c)* On pose $x = 2 + \tan t$; avec $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$$\begin{cases} x = 3 \Leftrightarrow 2 + \tan t = 3 \Leftrightarrow \tan t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x = 2+\sqrt{3} \Rightarrow 2 + \tan t = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \tan t = \sqrt{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3}$

$x = 2 + \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t)\,dt$

$x = 2 + \tan t \Rightarrow 1 + (x-2)^2 = 1 + \tan^2 t$

Pour calculer $B = \displaystyle\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx$

On remplace avec le changement de variable :

$$\int_3^{2+\sqrt3}\frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2 t}(1+\tan^2 t)\,dt$$

$$\text{''} \quad =\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}dt$$

$$\text{''} \quad =[t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{''} \quad =\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$$

En fin : $\displaystyle\int_3^{2+\sqrt3}\frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx=\frac{\pi}{12}$

$\Rightarrow \boxed{B=\frac{\pi}{12}}$

d) * pour calculer $J:\displaystyle\int_3^{2+\sqrt3}\ln(x^2-4x+5)\,dx$

à l'aide d'une I.p.p :

On Pose : $\begin{cases}u(x)=\ln(x^2-4x+5)\\ v'(x)=1\end{cases}$

Alors : $\begin{cases}u'(x)=\dfrac{2x-4}{x^2-4x+5}\\ v(x)=x\end{cases}$

où : $J=\left[x\ln(x^2-4x+5)\right]_3^{2+\sqrt3}-\displaystyle\int_3^{2+\sqrt3}\frac{2x^2-4}{x^2-4x+5}\,dx$

$J=(2+\sqrt3)\ln\left((2+\sqrt3)^2-4(2+\sqrt3)+5\right)-3\ln(3^2-4\times3+5)-\displaystyle\int_3^{2+\sqrt3}2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+(x-2)^2}\right)dx$

$J=(2+\sqrt3)\ln4-3\ln2-2\left(\displaystyle\int_3^{2+\sqrt3}dx+\int_3^{2+\sqrt3}\frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx-\int_3^{2+\sqrt3}\frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx\right)$

D'après 4.b) et 4.c) On Obtient :

$J=(2+\sqrt3)\ln(2^2)-3\ln2-2\left([x]_3^{2+\sqrt3}+A-B\right)$

$J=2(2+\sqrt3)\ln2-3\ln2-2\left(2+\sqrt3-3+\ln2-\frac{\pi}{12}\right)$

$J=(1+2\sqrt3)\ln2-2\left(-1+\sqrt3+\ln2-\frac{\pi}{12}\right)$

$J=(1+2\sqrt3)\ln2+2-2\sqrt3-2\ln2+\frac{\pi}{6}$

$\boxed{J=(-1+2\sqrt3)\ln2+2-2\sqrt3+\frac{\pi}{6}}$

Pour calculer $K=2\displaystyle\int_3^{2+\sqrt3}\ln x\,dx$

à l'aide d'une I.p.p :

On Pose : $\begin{cases}u(x)=\ln x\\ v'(x)=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}u'(x)=\dfrac{1}{x}\\ v(x)=x\end{cases}$

$K=\left[x\ln x\right]_3^{2+\sqrt3}-\displaystyle\int_3^{2+\sqrt3}\frac{1}{x}\,x\,dx$

$K=2\left(\left[x\ln x\right]_3^{2+\sqrt3}-\left[x\right]_3^{2+\sqrt3}\right)$

$K=2\left(\left[x\ln x-x\right]_3^{2+\sqrt3}\right)$

$K=2\left((2+\sqrt3)\ln(2+\sqrt3)-2-\sqrt3-3\ln3+3\right)$

$K=2\left((2+\sqrt3)\ln(2+\sqrt3)+1-\sqrt3-3\ln3\right)$

$\boxed{K=(4+2\sqrt3)\ln(2+\sqrt3)+2-2\sqrt3-6\ln3}$

Pour calculer l'aire S :

On Remarque que pour $x\geq3$ la droite d'équation est au dessus de la courbe (C).

On en déduit que la suite (I_n) est convergente, car décroissante et minorée.

Remarque : Toute suite positive est minorée par 0.

4-a) * f est $\searrow$ sur $\mathbb{R}$, Donc $0<t<\alpha$

On a : $f(\alpha) \leqslant f(t) \leqslant f(0)$

donc $\alpha \leqslant f(t) \leqslant \frac{1}{2}$ et $\alpha > 0$

$\Rightarrow 0 < \alpha^n \leqslant f^n(t) \leqslant \frac{1}{2^n}$

$$\Rightarrow \int_0^\alpha \alpha^n \, dt \leqslant \int_0^\alpha f^n(t)\,dt \leqslant \int_0^\alpha \frac{1}{2^n}\,dt$$

$$\alpha^n [t]_0^\alpha \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^n}[t]_0^\alpha$$

$$\alpha^n(\alpha - 0) \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^n}(\alpha - 0)$$

$$\boxed{\alpha^{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{\alpha}{2^n}}$$

comme $0<\alpha<1$, On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^{n+1} = 0$

On a aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0$

lors d'après le Théorème de gendarme :

$\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

) * On a pour tout $n>0$: $I_{n+1} - I_n =$

$$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$$

Donc :

pour $n=1$: $I_2 - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$

Pour $n=2$: $I_3 - I_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right)$

pour $n=3$: $I_4 - I_3 = \frac{1}{3}\left(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}\right)$

Pour $n-1$: $I_n - I_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

par addition membre à membre et simplification :

$$I_n - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right) \cdots + \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$I_n = I_1 + \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{K}\left(\alpha^K - \frac{1}{2^K}\right)$$

$$I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{K}\left(\alpha^K - \frac{1}{2^K}\right)$$

On peut écrire :

$$I_n - (\alpha + \ln(2\alpha)) = \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{K}\left(\alpha^K - \frac{1}{2^K}\right)$$

Par passage aux limites :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{K}\left(\alpha^K - \frac{1}{2^K}\right) = \lim_{n \to +\infty} I_n - \lim_{n \to +\infty}(\alpha + \ln 2\alpha)$$

comme $\lim\limits_{x \to +\infty} I_n = 0$ et

$\lim (\alpha + \ln(2\alpha)) = \alpha + \ln(2\alpha)$

car indépendant de n ; On en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{K}\left(\alpha^K - \frac{1}{2^K}\right) = -(\alpha + \ln(2\alpha))$$

Nevisse Mnt Lemrabott

Baccalauréat 2015

Session Normale

Exercice 3 : Suite :

$I_1 = -\ln\left(\frac{e^\alpha+1}{e^\alpha}\right) + \ln 2$

$I_1 = \ln\left(\frac{1}{e^\alpha+1} \cdot e^\alpha\right) + \ln 2$

$I_1 = \ln(\alpha \cdot e^\alpha) + \ln 2$

car $f(\alpha) = \alpha \Rightarrow \frac{1}{e^\alpha+1} = \alpha$

$I_1 = \ln\alpha + \ln e^\alpha + \ln 2$

$\boxed{I_1 = \alpha + \ln(2\alpha)}$

3a)* On a : $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^{-x})^2}$

$f^2(x) - f(x) = \frac{1}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{1+e^x} \times \frac{1+e^x}{1+e^x}$

$= \frac{1}{(1+e^x)^2} - \frac{1+e^x}{(1+e^x)^2}$

$^2(x) - f(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} = f'(x)$

$\boxed{\text{Donc } f'(x) = f^2(x) - f(x)}$

)* D'après b), en Multipliant par $f^{n-1}(x)$ On obtient :

$f'(x) \cdot f^{n-1}(x) = f^{n+1}(x) - f^n(x)$

Par Intégration de 0 à α On obtient :

$\int_0^\alpha f'(x) f^{n-1}(x)\,dx = \int_0^\alpha f^{n+1}(x)\,dx - \int_0^\alpha f^n(x)\,dx$

$\left[\frac{1}{n} f^n(x)\right]_0^\alpha = I_{n+1} - I_n$

$\frac{1}{n}\left(f^n(\alpha) - f^n(0)\right) = I_{n+1} - I_n$

$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$\boxed{I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)}$

d)* On a $\alpha > 0$ et pour tout entier Naturel non nul n, f^n est continue et positive Sur $[0, \alpha]$. Alors $\int_0^\alpha f^n(t)\,dt \geq 0$

D'où $I_n \geq 0$, Donc (I_n) est positive

D'autre part, pour entier Naturel non Nul n On a :

$0 < \alpha < 0{,}5 \Rightarrow 0 < \alpha^n < \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \alpha^n - \frac{1}{2^n} < 0 \Rightarrow I_{n+1} - I_n < 0$

D'où I_n est décroissante

c)* La courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

De plus $\lim \left(f(x) - (3x-3)\right)$

$$= \lim \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right) = 0$$ donc la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique D d'équation $y = 3x - 3$

Pour étudier la P.R de $(\mathcal{C})$ et de D on étudie le signe de $d(x) = f(x) - y$

$d(x) = f(x) - (3x-3)$

$$d(x) = \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)$$

Alors le signe de $d(x) = \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)$ est celui de $\frac{x^2-4x+5}{x^2} - 1$:

$$\frac{x^2-4x+5}{x^2} - 1 = \frac{x^2-4x+5-x^2}{x^2}$$

$$= \frac{-4x+5}{x^2}$$ Donc le signe de $d(x)$

est celui de $-4x+5$ (car $x^2 > 0$)

x	$-\infty$ 0	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$-4x+5$	$+$ ‖ $+$	0	$-$
$d(x)$	$+$ ‖ $+$		$-$
P.R	$\mathcal{C}/D$ ‖ $\mathcal{C}/D$		$D/\mathcal{C}$

Au point d'abscisse $x = \frac{5}{4}$ on a :

$y = 3 \times \frac{5}{4} - 3 = \frac{3}{4}$, Alors l'asymptote D coupe la courbe $(\mathcal{C})$ au point $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$

3) a) $f(x) = 3x - 3 + \ln(x^2-4x+5) - \ln(x^2)$

$$= 3x - 3 + \ln(x^2-4x+5) - 2\ln x$$

Donc $f'(x) = 3 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{2}{x}$

$$f'(x) = 3 + \frac{(2x-4)x - 2(x^2-4x+5)}{x(x^2-4x+5)}$$

$$f'(x) = \frac{3(x^3-4x^2+5x) + 2x^2 - 4x - 2x^2 + 8x - 1}{x^3-4x^2+5x}$$

$$= \frac{3x^3 - 12x^2 + 15x + 4x - 10}{x^3-4x^2+5x}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3 - 12x^2 + 19x - 10}{x^3-4x^2+5x}$$

En fin $f'(x) = g(x)$

le T.V de $f(x)$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖ $+\infty \searrow$	$\ln 2$	$\nearrow +\infty$

b)* Sur l'intervalle $]0,+\infty[$ on a : $f(x) \geq \ln 2 > 0$, Donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans cet intervalle.

Sur l'intervalle $]-\infty,0[$, la restriction de f est continue, strictement monotone et change de signe car $0 \in f(]-\infty,0[) =]-\infty,+\infty[$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans cet intervalle $]-\infty,0[$.

Nevisse Mnt Lemrabott

Baccalauréat 2015

Session Normale

Exercice 4 :

* $g(x) = \dfrac{3x^3 - 12x^2 + 19x - 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$

pour tout x de $\mathbb{R}^*$ on a :

$$g(x) = \frac{(x-1)(ax^2+bx+c)}{x(x^2-4x+5)}$$

On doit factorise le dénominateur par x :

$$x^3 - 4x^2 + 5x = x(x^2 - 4x + 5)$$

et le Numérateur par de T. H :

	3	-12	19	-10
1	↓	3	-9	10
	3	-9	10	0

Alors $3x^3 - 12x^2 + 19x - 10$

$= (x-1)(3x^2 - 9x + 10)$

Donc $g(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2-9x+10)}{x(x^2-4x+5)}$

donc des Réels : $\boxed{a = 3}$; $\boxed{b = -9}$; $\boxed{c = 10}$

b) * le Signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$ est celui de $\dfrac{x-1}{x}$:

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
x	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{x-1}{x}$	$+$	$-$	$+$
$g(x)$	$+$	$-$	$+$

2) - a * $\lim\limits_{x \to 0} (3x - 3) = -3$

et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x^2} = +\infty$

$\Rightarrow \lim \ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right) = +\infty$

Alors $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty}$

Interpretation graphique :

C_f admet une asymptote Verticale d'équation $x = 0$

b) * On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x^2} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right) = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (3x - 3)$. D'où

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Suite Exercice 4 :

S.N :

Alors S :

$$S = \int_3^{2+\sqrt{3}} (y - f(x))\, dx = -\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right) dx$$

$$S = -\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2-4x+5)\,dx + \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2)\, dx$$

Donc $S = -J + K$

$$S = -\left((-1+2\sqrt{3})\ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right) + \left((4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 2 - 2\sqrt{3} - 6\ln 3\right)$$

$$S = (1-2\sqrt{3})\ln 2 - 2 + 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} + (4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 2 - 2\sqrt{3} - 6\ln 3$$

$$S = (1-2\sqrt{3})\ln 2 + (4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) - 6\ln 3 - \frac{\pi}{6} \text{ en } U.a$$

$\boxed{S \simeq 1{,}0066}$ en Unité d'aire