Boune Bekheir N° 1114 7c

Exercice 6

Dans $\mathbb{C}$ on donne :

$$a=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$$

① Calculer a^2. Donner le module et un argument de a^2.

② En déduire le module et un argument de a.

③ En déduire $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$

④ Donner les entiers naturels n tels que a^n soit réel.

Solution

① On a : $a^2=\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)^2$

$a^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2}+2i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2}}-\frac{2+\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a^2=-\frac{2\sqrt{3}}{2}+2i\sqrt{\frac{1}{4}}\Rightarrow$

$a^2=-\sqrt{3}+i$

- Module : $|a^2|=|-\sqrt{3}+i|=\sqrt{3+1}\Rightarrow$ $|a^2|=2$
- Argument : Soit θ un réel tel que $\arg a^2=\theta$

Alors : $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow$ $\arg a^2=\frac{5\pi}{6}$.

2.a) Module et argument de a :

- Module : $|a^2|=2\Rightarrow|a|=\sqrt{2}$
- Argument : $\arg a^2=\frac{5\pi}{6}\Rightarrow$

$2\arg a=\frac{5\pi}{6}$

$\arg a=\frac{5\pi}{12}+k\pi$, $k\in\{0,1\}$

Soit $k=0\Rightarrow\arg a=\frac{5\pi}{12}$

Soit $k=1\Rightarrow\arg a=\frac{5\pi}{12}+\pi=\frac{17\pi}{12}$

Comme $Re(a)>0$ et $Im(a)>0$, $\arg a\neq\frac{17\pi}{12}$.

Enfin, $\arg a=\frac{5\pi}{12}$.

3) D'après ce qui précède, on déduit que :

$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}}\Rightarrow\cos\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$

$\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}}\Rightarrow\sin\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$

4) Le nombre a^n est réel si et

Suite d'exo6

(4) le nombre a^n est réel si et seulement si arg $a^n = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$:

$$\arg a^n = k\pi \Leftrightarrow \frac{5n\pi}{12} = k\pi \Leftrightarrow 5n = 12k \Leftrightarrow n = \frac{12k}{5}$$

n est un entier naturel et le nombre 12 n'est pas divisible par 5, donc k est divisible par 5. On prend $k = 5k'$ avec $k' \in$

$$\arg a^n = k\pi \Leftrightarrow n = 12 \times \frac{k}{5} \Leftrightarrow n = 12k'$$

alors, l'ensemble des valeurs de n tel que a^n soit réel c'est les multiples de 12.