Correction du Baccalauréat 2015

SN

Mine Lou Mbareck elkor

Exo 1

on pose

a) calcul du $P(3)$

$P(3) = 3^3 - (11+6i)3^2 + (28+38i)3 - 12 - 60i$

$= 27 - 99 - 54i + 84 + 114i - 12 - 60i$

$= 27 - 99 - 54i + 84 + 114i - 12 - 60i$

$P(3) = 0$

les réels a . b . c

$(z-3)(z^2 + az + b)$

	1	$-11-6i$	$28+38i$	$-12-60i$
3	✗	3	$-24-18i$	$12+60i$
	1	$-8-6i$	$4+20i$	0

$a = -8-6i$; $b = 4+20i$

b) $(z-3)(z^2 + (-8-6i)z + 4 + 20i)$

$z - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{z_0 = 3}$

$z^2 + (-8-6i)z + 4 + 20i = 0$

$\Delta = (-8-6i)^2 - 4(4+20i)$

$\Delta = 28 + 96i - 16 + 80i$

$\Delta = 12 + 16i = (4+2i)^2$

donc $\delta = 4 + 2i$

$z_1 = \dfrac{8+6i+4+2i}{2} = 6 + 4i$

$z_2 = \dfrac{8+6i-4+2i}{2} = 2 + 2i$

l'ensemble de solution de l'equation est $S = \{3 ; 6+4i ; 2+2i\}$

c) les pnt A, B et C sont les images de l'equation $P(z) = 0$ avec $Im(z_A) < Im(z_B) < Im(z_C)$

Donc

$$\begin{cases} z_A = z_0 = 3 \\ z_B = z_2 = 2+2i \\ z_C = z_1 = 6+4i \end{cases}$$

$G = bar$
A	B	C
2	-2	2

l'affixe de G est

$z_G = \dfrac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2-2+2}$

$z_G = \dfrac{2(3) - 2(2+2i) + 2(6+4i)}{2}$

$\boxed{z_G = 7 + 2i}$

2) par methode de nombres complexes

a) on designe par z et z' les affixes respectives de M et M'

$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC}$

$\Rightarrow z' - z = 2(z_A - z) - 2(z_B - z) + (3-k)(z_C - z)$

$\Rightarrow z' - z = 2(3-z) - 2(2+2i-z) + (3-k)(6+4i-z)$

$\Rightarrow z' = z + 6 - 2z - 4 - 4i + 2z + 18 - 6k$
$+ 12i - 4ki - (3-k)z$

$z' = (k-2)z + 20 - 6k + (8-4k)i$

une expression de type

$z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{C}$

si $k = 3$ $\quad (k-3=0 \Rightarrow k=3)$

ma $z' = z + 2 - 4i$ donc

f_3 est une translation donc le vecteur a pour affixes

$2-4i$. soit $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

b) Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{2;3\}$

alors $k-2 \neq 0$ et $k-2 \neq 1$

les pnts invariants sont d'affixes z verifiant $z' = z$

$z' = z \Rightarrow z = (k-2)z + 20 - 6k + (8-4k)i$

$\Rightarrow z = \dfrac{20 - 6k + (8-4k)i}{3-k}$

D'ou f_k admet un unique pnt invariants ω_k

d'affixe $z_k = \dfrac{20 - 6k + (8-4k)i}{3-k}$

D'apres la forme complexe

$z' = (k-2)z + 20 - 6k + (8-4k)i$

f_k est l'homothetie de centre ω_k et de rapport

$z_k = \dfrac{20 - 6k + (8-4k)i}{3-k}$

Exo 3

1) a- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{x}} = 1$

(c) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{1+e^{x}} = 0$

(c) admet une Asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$

b) $f'(x) = \frac{0(1+e^{x}) - e^{x}}{(1+e^{x})^2} = \frac{-e^{x}}{(1+e^{x})^2}$

$f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	0

Comme f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) =]0,1[$

Donc $f : \mathbb{R} \to]0,1[$ est bijective

$I =]0,1[$

pour exprimer $f^{-1}(x)$ on pose $y = f(x)$

on a : $y = \frac{1}{1+e^{x}} \Rightarrow y(1+e^{x}) = 1$

$y + ye^{x} = 1 \Rightarrow ye^{x} = 1 - y$

$e^{x} = \frac{1-y}{y} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$

D'où $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$; $x \in]0,1[$

2) a- pour que $\omega(0;\frac{1}{2})$ soit un centre de symétrie il faut qu'il vérifie l'égalité $f(2a-x) + f(x) = 2b$

$\begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

$f(2a-x) + f(x) = \frac{e^{x}+1}{e^{x}+1} = 1 = 2b$

Donc $\omega(0,\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe (c)

1) les courbes (C) et (C') sont symetrique par rapport a la droite d'équation $y = x$ s'il se coupent en un point d'abscisse x ; alors x verifie $f(x) = x$; soit $f(x) - x = 0$

on pose $V(x) = f(x) - x$

V est derivable et continue sur $\mathbb{R}$

avec $V'(x) = f'(x) - 1$

$$V'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} - 1 = -\left(1 + \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)$$

d'onc $\forall x$ de $\mathbb{R}$ $V'(x) < 0$

d'ou V et strictement decroissante sur $\mathbb{R}$

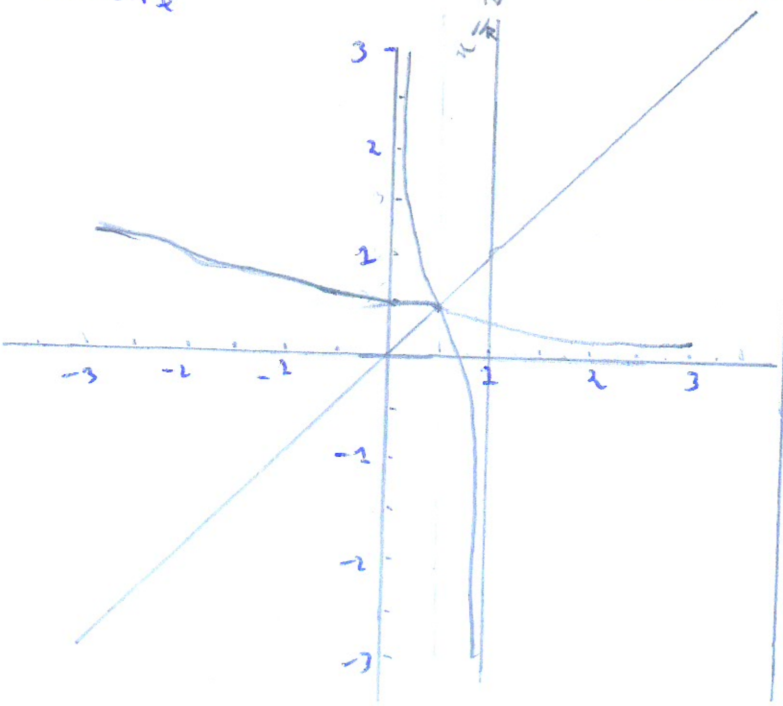
on a

$V(0,4) > 0$

$V(0,5) < 0$

donc $V(0,4) \times V(0,5) < 0 \Rightarrow$ l'equation $V(x) = 0$ admet une solution α tel que $0,4 < \alpha < 0,5$

donc V est continue sur $[0,4 ; 0,5]$ est change de signe $\Rightarrow$ V est strictement monotone



2) l'aire cherche egale au double de l'aire comprise entre (C) et la droite $y = x$ et les dte d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$

$$A = 2\int_0^\alpha (f(x) - x)\, dx$$

$$A = 2\int_0^\alpha \left(\frac{1}{e^x+1} - x\right) dx$$

$$A = 2\int_0^\alpha \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} - x\right) dx$$

$$A = -2\int_0^\alpha \left(\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} + x\right) dx$$

$$A = -2\left[-\ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{2}x^2\right]_0^\alpha$$

$$A = 2\left[\ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{2}x^2\right]_0^\alpha$$

$$A = 2\left(\ln(1+e^{-\alpha}) - \frac{1}{2}\alpha^2 - \ln 2\right)$$

$$A = 2\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{2}\right) - \alpha^2$$

$$A - 2\ln\left(\frac{1+e^\alpha}{2e^\alpha}\right) - \alpha^2$$ en unit d'aire

3) on a $I_n = \int_0^\alpha f^n(t)\, dt$

a- $I_1 = \int_0^\alpha f(t)\, dt$

$$I_1 = \int_0^\alpha \frac{1}{e^t+1}\, dt$$

$$I_1 = \int_0^\alpha \frac{1}{e^t+1} \times \frac{e^{-t}}{e^{-t}}\, dt$$

$$I_1 = -\int_0^\alpha \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\, dt$$

$$I_1 = \left[-\ln(1+e^{-t}\right]_0^\alpha$$

$I_1 = -\ln|1+e^{-\alpha}| + \ln 2$

$I_1 = -\ln\left(\frac{e^{\alpha}+1}{e^{\alpha}}\right) + \ln 2$

$I_1 = \ln\left(\frac{1}{e^{\alpha}+1} e^{\alpha}\right) + \ln 2$

$I_1 = \ln(\alpha e^{\alpha}) + \ln 2$

car $f(\alpha) = \alpha \Rightarrow \frac{1}{e^{\alpha}+1} = \alpha$

$I_1 = \ln(\alpha) + \ln e^{\alpha} + \ln 2$

$I_1 = \alpha + \ln(2\alpha)$

3)b – ona : $f'(x) = \frac{-e^{x}}{(1+e^{x})^2}$

$f^2(x) - f(x) = \frac{1}{(1+e^{x})^2} - \frac{1}{1+e^{x}} \times \frac{1+e^{x}}{1+e^{x}}$

$= \frac{1}{(1+e^{x})^2} - \frac{1+e^{x}}{(1+e^{x})^2} = \frac{-e^{x}}{(1+e^{x})^2}$

$\Rightarrow f^2(x) - f(x) = f'(x)$

c) D'apres b) en multipliant par $f^{n-1}(x)$ on obtient

$f'(x) f^{n-1}(x) = f^{n+1}(x) - f^{n}(x)$

par integration de 0 a α

$\int_0^{\alpha} f'(x) f^{n-1}(x)\, dx = \int_0^{\alpha} f^{n+1}(x)\, dx - \int_0^{\alpha} f^{n}(x)\, dx$

$= \left[\frac{1}{n} f^{n}(x)\right]_0^{\alpha} = I_{n+1} - I_n$

$\frac{1}{n}\left(f^{n}(\alpha) - f^{n}(0)\right) = I_{n+1} - I_n$

$\frac{1}{n}\left(\alpha^{n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right) = I_{n+1} - I_n$

$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^{n} - \frac{1}{2^n}\right)$

d) ona $\alpha > 0$ et pour tout entier naturel non nul n ; f^{n} est continue et positive sur $[0, \alpha]$ Alors $\int_0^{\alpha} f^{n}(t)\, dt \geq 0$

D'ou $I_n \geq 0$ Donc I_n est positive

D'autre part ; pour tout entier naturel non nul n ona

$0 \leq \alpha < 0,5 \Rightarrow 0 < \alpha^{n} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

$\Rightarrow \alpha^{n} < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \alpha^{n} - \frac{1}{2^n} < 0$

$\Rightarrow I_{n+1} - I_n < 0$

D'ou (I_n) est decroissante

on en deduit que la suite (I_n) est convergente, car décroissante et minorée

ii) On sait que f est decroissante sur $\mathbb{R}$. Donc si $0 \leq t \leq \alpha$ on a

$f(\alpha) \leq f(t) \leq f(0)$

donc

$\alpha \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$ et $\alpha > 0$

$\Rightarrow 0 < \alpha^n \leq f^n(t) \leq \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow \int_0^\alpha \alpha^n \, dt \leq \int_0^\alpha f^n(t)\, dt \leq \int_0^\alpha \frac{1}{2^n} \, dt$

$\alpha^n [t]_0^\alpha \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}(\alpha - 0)$

$\alpha^n(\alpha - 0) \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}(\alpha - 0$

$\alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$

comme $0 < \alpha < 1$ on a

$\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha^{n+1} = 0$ on a aussi

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0$

Donc d'après le TG

$\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

j) on a pour tout $n > 0$

$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$

pour $n = 1$: $I_2 - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$

$n = 2$: $I_3 - I_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right)$

$n = 3$: $I_4 - I_3 = \frac{1}{3}\left(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}\right)$

$n = 4$: $I_5 - I_4 = \frac{1}{4}\left(\alpha^4 - \frac{1}{2^4}\right)$

$n-1$: $I_n - I_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

par addition a membre et simplification

$I_n - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2^1}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right)$

$+ \frac{1}{3}\left(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}\right) - - - \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$I_n - I_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$

$I_n = I_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$

$I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$

• limite

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} I_n - \lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha + \ln(2\alpha))$

$\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha + \ln(2\alpha)) = \alpha + \ln(2\alpha)$ independante de n

$\Rightarrow$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right) = -\left(\alpha + \ln(2\alpha)\right)$

Exo 4

1) a-

pour la transformation d'écriture de $g(x)$ on factorise le denominateur et le numerateur

* on factorise le denominateur par x

$x^3 - 4x^2 + 5x = x(x^2 - 4x + 5)$

* pour le numerateur on peut utilise le tableau d'horner

	3	-12	19	-10
1	X	3	-9	10
	3	-9	10	0

Alors

$3x^3 - 12x^2 + 19x - 10 = (x-1)(3x^2 - 9x + 10)$

Donc on a pour tout x de $\mathbb{R}^*$

$$(x) = \frac{(x-1)(3x^2 - 9x + 10)}{x(x^2 - 4x + 5)}$$

Alors $\boxed{a = 3}$ $\boxed{b = -9}$ $\boxed{c = 10}$

b) le signe de $g(x)$

les discriminants des trinômes

$3x^2 - 9x + 10$ $\Delta = -39$

et $x^2 - 4x + 5$ $\Delta = -4$

sont negatifs

les coifficients de x^2 sont positifs

on en deduit que pour tout x de $\mathbb{R}^*$

$3x^2 - 9x + 10 > 0$ et

$x^2 - 4x + 5 > 0$

D'ou le signe de $g(x)$ est celui de $\frac{x-1}{x}$

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
x	$-$	||	$+$	|	$+$	
$x-1$	$-$	|	$-$	|	$+$	
$\frac{x-1}{x}$	$+$	||	$-$	|	$+$	
$g(x)$	$+$	||	$-$	|	$+$	

2) a-

on a

$\lim_{x \to 0} (3x-3) = -3$ et

$\lim_{x \to 0} \frac{x^2-4x+5}{x^2} = +\infty$ $\Rightarrow$

$\lim_{x \to 0} \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right) = +\infty$

Alors $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

la courbe (c) admet une asymptote verticale d'equation $x=0$

b) on a

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-4x+5}{x^2} = 1$ $\Rightarrow$

$\lim_{x \to \pm\infty} \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right) = 0$

Donc $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (3x-3)$

D'ou

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

) d'apres a)

a courbe (c) admet une A.V

'equation $x=0$

e plus

$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x)-(3x-3)) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right) = 0$

donc la courbe (c) admet une A.O D d'equation $y=3x-3$

pour etudier la position relative de (c) et de D, on etudie le signe de

$d(x) = f(x) - y = f(x) - (3x-3)$

$d(x) = \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)$

on rappelle que le signe de $\ln t$ est celui de $t-1$ pour tout $t>0$

Alors le signe de

$d(x) = \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)$ est celui

de $\frac{x^2-4x+5}{x^2}$

par réduction au meme denominateur

$\frac{x^2-4x+5}{x^2} - 1 = \frac{x^2-4x+5-x^2}{x^2}$

$= \frac{-4x+5}{x^2}$

donc le signe de $d(x)$ est celui de $-4x+5$ car $x^2>0$

x	$-\infty$	0	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$-4x+5$	+	+		−
$d(x)$	+	‖ +		−
P.R	C/D	‖ C/D	‖	D/C

pour $x = \frac{5}{4}$

on a $y = 3 \times \frac{5}{4} - 3 = \frac{3}{4}$

Alors l'asymptote D coupe la courbe (c) au point $\left(\frac{5}{4} ; \frac{3}{4}\right)$

3) a-

on peut ecrire $f(x) =$

$f(x) = 3x - 3 + \ln(x^2 - 4x + 5) - \ln(x^2)$

$f(x) = 3x - 3 + \ln(x^2 - 4x + 5) - 2\ln x$

Donc $f'(x) = 3 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{2}{x}$

$f'(x) = 3 + \frac{(2x-4)x - 2(x^2-4x+5)}{x(x^2-4x+5)}$

$f'(x) = \frac{3(x^3-4x^2+5x) + ((2x-4)x - 2(x^2-4x+5))}{x^3-4x^2+5x}$

$f'(x) = \frac{3x^3 - 12x^2 + 15x + 2x^2 - 4x - 2x^2 + 8x - 10}{x^3-4x^2+5x}$

$f'(x) = \frac{3x^3 - 12x^2 + 19x - 10}{x^3-4x^2+5x}$

Donc $f'(x) = g(x)$

tableau de variations de f

le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

b) sur l'intervalle $]0,+\infty[$ on a $f(x) \geq \ln 2 \geq 0$ Donc l'equation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans cet intervalle

- sur l'intervalle $]-\infty,0[$ la restriction de f est continue strictement monotone et change de signe car $0 \in f(]-\infty,0[) =]-\infty,+\infty[$

Donc l'equation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans cet intervalle

Alors l'equation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}^*$

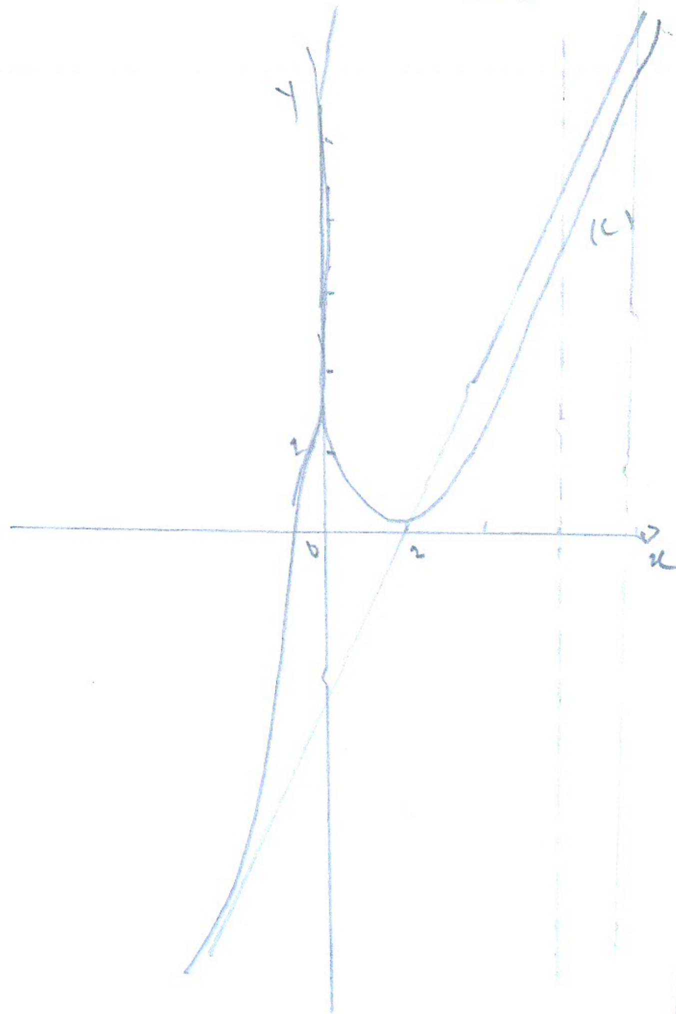
pour encadrer α ;

$\begin{cases} f(-1) = -6 + \ln 10 < 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \Big\} -1 < \alpha < 0$

$\begin{cases} f(-0,5) = -4,5 + \ln 29 < 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty \end{cases}$

$\Rightarrow -0,5 < \alpha < 0$ c'est un encadrement de α d'amplitude 5×10^{-1}

c) construction de (c)



4) a-

$2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2}\right)$

$= 2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+x^2-4x+4}\right)$

$= 2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{x^2-4x+5}\right)$

$= 2\left(1 + \frac{2x-4-1}{x^2-4x+5}\right)$

$= 2\left(\frac{x^2-4x+5+2x-5}{x^2-4x+5}\right)$

$= \frac{2x^2-8x+\cancel{10}+4x-\cancel{10}}{x^2-4x+5}$

$= \frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}$

donc

$\frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5} = 2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2}\right)$

b) calcule de l'aire

$$A = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx$$

$$= \left[\ln|x^2-4x+5|\right]_3^{2+\sqrt{3}}$$

car primitive de la fonction est de type $\frac{u'}{u} = \ln|u|$

on remplaçant par les bornes

$A = \ln|(2+\sqrt{3})^2 - 4(2+\sqrt{3})+5| - \ln|(3)^2 - 4(3)+5|$

$A = \ln|(4+4\sqrt{3}+3) - 8 - 4\sqrt{3}+5$

$- \ln(9-12+5)$

$A = \ln(4+4\sqrt{3}+3-8-4\sqrt{3}+5$

$\quad - \ln(9-12+5)$

$A = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$

donc

$A = \ln 2$

c) en posant $x = 2+\tan t$

avec $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on a

$x = 3 \Rightarrow 2+\tan t = 3 \Rightarrow \tan t = 1$
$\Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$x = 2+\sqrt{3} \Rightarrow 2+\tan t = 2+\sqrt{3}$
$\Rightarrow \tan t = \sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$

$x = 2+\tan t \Rightarrow dx = (1+\tan^2 t)\,dt$

$x = 2+\tan t \Rightarrow 1+(x-2)^2 = 1+\tan^2$

pour calculer B

$$B = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx$$

on remplace avec le changement de variable

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2 t}(1+\tan^2 t)\,dt$$

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt$$

$$= \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx = \left[t\right]_{\pi/4}^{\pi/3}$$

$$= \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

enfin $B = \frac{\pi}{12}$

d) ⊗ calcule de J

a l'aide d'une integration par parties

$$J = \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2-4x+5)\,dx$$

on pose

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x^2-4x+5) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

Alors $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{2x-4}{x^2-4x+5} \\ v(x) = x \end{cases}$

D'ou J

$$J = \left[x\ln(x^2-4x+5)\right]_3^{2+\sqrt{3}} - \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}\,dx$$

on remplace dans la premier partie par les bornes et dans l'integral par l'expresion trouvee en 4,a)

$$= (2+\sqrt{3})\ln\left((2+\sqrt{3})^2 - 4(2+\sqrt{3})+5\right)$$

$$- 3\ln(3)^2 - 4(3)+5$$

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} 2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2}\right.$$

$$J = (2+\sqrt{3})\ln 4 - 3\ln 2 - 2$$

$$\left(\int_3^{2+\sqrt{3}} dx + \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx - \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\right.$$

D'apres 4,b et 4,c on obtient

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx = A = \ln 2$$

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx = B = \frac{\pi}{12}$$

$$J = (2+\sqrt{3})\ln 2 - 3\ln 2 - 2\left(2+\sqrt{3} - 3 + \ln 2 - \frac{\pi}{12}\right.$$

$$J = 2(2+\sqrt{3})\ln 2 - 3\ln 2 - 2\left(2+\sqrt{3} - 3 + \ln 2 - \frac{\pi}{12}\right.$$

$$J = (1+2\sqrt{3})\ln 2 - 2\left(-1+\sqrt{3} + \ln 2 - \frac{\pi}{12}\right.$$

$$J = (1+2\sqrt{3})\ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} - 2\ln 2 + \frac{\pi}{6}$$

$$J = (-1+2\sqrt{3})\ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$$

⊗ calcule de K

$$K = 2\int_2^{2+\sqrt{3}} \ln x\,dx$$

a l'aide d'une integration par partie

on pose

$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$

on

$K = 2\left([x\ln x]_3^{2+\sqrt3} - \int_3^{2+\sqrt3} \frac{1}{x}\, x\, dx\right)$

$K = 2\left([x\ln x]_3^{2+\sqrt3} - \int_3^{2+\sqrt3} dx\right)$

$K = 2\left([x\ln x]_3^{2+\sqrt3} - [x]_3^{2+\sqrt3}\right)$

$K = 2\left([x\ln x - x]_3^{2+\sqrt3}\right)$

$K = 2\left((2+\sqrt3)\ln(2+\sqrt3) - (2+\sqrt3 - 3\ln 3 + 3)\right)$

$K = 2\left((2+\sqrt3)\ln(2+\sqrt3) + 1 - \sqrt3 - 3\ln 3\right)$

$K = (4+2\sqrt3)\ln(2+\sqrt3) + 2 - 2\sqrt3 - 6\ln 3$

• calcule de S

pour calculer l'aire S du domaine délimité par C et les droites d'équation $y = 3x - 3$; $x = 3$; $x = 2+\sqrt3$

on a : pour tout $x \geq 3$

la droite d'équation $y = 3x - 3$ est au dessus de la courbe

donc

$= \int_3^{2+\sqrt3} (y - f(x))\, dx = \int_3^{2+\sqrt3} (3x-3) - 3x - 3\ln\frac{x^2-4x+5}{x^2}$

$= -\int_3^{2+\sqrt3} \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right) dx$

$S = -\int_3^{2+\sqrt3} \ln(x^2-4x+5)\, dx + \int_3^{2+\sqrt3} \ln(x$

Donc $S = -J + K$

$S = -\left((-1+2\sqrt3)\ln 2 + 2 - 2\sqrt3 + \frac{\pi}{6}\right) + \left((4+2\sqrt3)\ln(2+\sqrt3) + 2 - 2\sqrt3 - 6\ln 3\right)$

$S = (1-2\sqrt3)\ln 2 + 2 - 2\sqrt3 + \frac{\pi}{6} + (4+2\sqrt3)\ln(2+\sqrt3) + 2 - 2\sqrt3 - 6\ln 3$

$S = (1-2\sqrt3)\ln 2 + (4+2\sqrt3)\ln(2+\sqrt3) - 6\ln 3 -$

en unité d'aire