Aichetou | Baba | Boumeiss

Baccalauréat 2015

session normale

Exercice: 1

1) $p(z) = z^3 - (11+6i)z^2 + (28+38i)z - 12 - 60i$

a) $p(3) = (3)^3 - (11+6i)\times 9 + (28+38i)\times 3 - 12 - 60i = 0$

tableau d'Horner

	1	$-11-6i$	$28+38i$	$-12-60i$
3	$\times$	3	$-24-18i$	$12+60i$
	1	$-8-6i$	$4+20i$	0

$p(z) = (z-3)(z^2 - (8+6i)z + 4 + 20i)$

b) $p(z) = 0 \Rightarrow z - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{z = 3}$

$z^2 - (8+6i)z + 4 + 20i = 0$

$\Delta = (8+6i)^2 - 4(1)(4+20i)$

$= 64 - 36 + 96i - 16 - 80i$

$\Delta = 12 + 16i = (4+2i)^2$ Donc $\delta = 4+2i$

Les solutions sont:

$z_1 = \dfrac{8+6i+4+2i}{2} = 6+4i$; $z_2 = \dfrac{8+6i-4-2i}{2} = 2+2i$

Conclusion: L'ensemble de solutions de l'equation $p(z) = 0$ est:

$S\{3, 6+4i, 2+2i\}$

c) Les points A, B et C sont les images des solutions de l'equation $p(z)=0$ avec $Im(z_A) < Im(z_B) < Im(z_C)$

Donc $z_A = 3$; $z_B = 2+2i$ et $z_C = 6+4i$

G est le barycentre du systeme $\{(A;2);(B,-2);(C,2)\}$.

~~G est~~ l'affixe de G est : $z_G = \dfrac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2-2+2}$

$$z_G = \frac{2(3)-2(2+2i)+2(6+4i)}{2} = \frac{14+4i}{2} = 7+2i$$

3) $\varphi(M) = 2MA^2 - 2MB^2 + 2MC^2$ et Γ_m l'ensemble des pts M tels que $\varphi(M) = m$, où m est un reél

La somme des Coefficients est egale à 2 (non nulle).

Le barycentre G de ce systeme est le point $\Omega(7,2)$

Alors par transformation d'ecriture on obtient l'ecriture reduite $\varphi(M) = 2MG^2 + \varphi(G)$

Donc $M \in \Gamma_m \Leftrightarrow 2MG^2 + \varphi(G) = m$

soit $MG^2 = \dfrac{m - \varphi(G)}{2}$

Calculons $\varphi(G)$:

On a $\varphi(G) = 2GA^2 - 2GB^2 + 2GC^2$ on remarque que G est le point $\Omega(7,2)$.

Donc $GA^2 = |z_A - z_G|^2 = |3-7-2i|^2 = |-4-2i|^2 = 20$

$GB^2 = |z_B - z_G|^2 = |2+2i-7-2i|^2 = |-5|^2 = 25$

$GC^2 = |z_C - z_G|^2 = |6+4i-7-2i|^2 = |-1+2i|^2 = 5$

Alors $\varphi(G) = 2GA^2 - 2GB^2 + 2GC^2$

$\varphi(G) = 2\times 20 - 2\times 25 + 2\times 5$.

Enfin $\varphi(G) = 0$. D'où $M \in \Gamma_m \Rightarrow MG^2 = \dfrac{m}{2}$

Discussion suivant les valeurs de m :

$m<0$: Γ_m est l'ensemble vide

$m=0$: Γ_m est le point G

$m>0$: Γ_m est le cercle de centre G et de rayon $r=\sqrt{\frac{m}{2}}$

b) D'après les resulats précédents pour $m=10$, l'ensemble est un cercle de centre G et de rayon $r=\sqrt{\frac{m}{2}}=\sqrt{\frac{10}{2}}=\sqrt{5}$.

Comme $GC^2=5$, ce cercle passe par C. Donc Γ_{10} est le cercle de centre G passant par C.

Exercice : 3

$f(x)=\frac{1}{1+e^x}$

1)

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{-\infty}\left(\frac{1}{1+e^x}\right)=1$, car $\lim_{-\infty}(e^x)=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{+\infty}\left(\frac{1}{1+e^x}\right)=0$ car $\lim_{+\infty}(e^x)=+\infty$

L'interpretation graphique :

$\lim_{-\infty} f(x)=1 \Rightarrow$ (C) admet une asymptote horizontale d'equation $y=1$ au voisinage de $-\infty$

$\lim_{+\infty} f(x)=0 \Rightarrow$ (C) admet une asymptote horizontale d'equation $y=0$ au voisinage de $+\infty$

b) $f'(x)=\frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$ On constate que $f'(x)<0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc f est strictement decroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow$

$\begin{cases} f \text{ est continue et strictement decroissante sur } \mathbb{R}. \\ f(\mathbb{R}) =]0,1[\end{cases}$

Alors $f : \mathbb{R} \to]0,1[$ est bijective ; $J =]0,1[$

pour exprimer $f^{-1}(x)$; on pose $y = f(x)$

On a : $y = \frac{1}{1+e^x} \Rightarrow y(1+e^x) = 1$

$\Rightarrow y + ye^x = 1 \Rightarrow ye^x = 1-y \Rightarrow e^x = \frac{1-y}{y} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$

D'où : $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$, $x \in]0,1[$

2) a) On verifie une egalité du type $f(2a-x) + f(x) = 2b$ avec $(a,b) = (0, \frac{1}{2})$

On a : $f(2a-x) + f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{1}{1+e^x}$

$f(2a-x) + f(x) = \frac{e^x+1}{e^x+1} = 1 = 2 \times \frac{1}{2} = 2b$

D'où $\Omega(0, \frac{1}{2})$ est un centre de symetrie de la courbe (C)

b) Les courbes (C) et (C') sont symetriques par rapport à la droite d'equation $y = x$.

s'il se coupent en un point d'abscisse x, alors x verifie $f(x) = x$, soit $f(x) - x = 0$, on pose $v(x) = f(x) - x$

v est derivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ avec $v'(x) = f'(x) - 1$

$v'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} - 1 = -\left(1 + \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)$

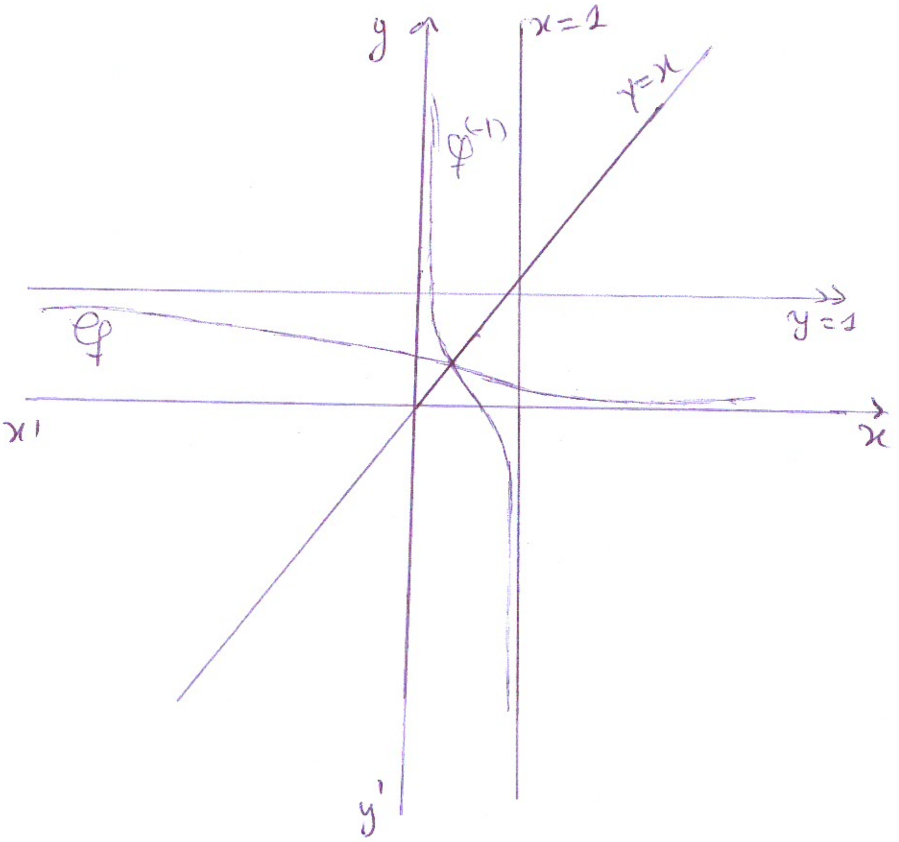
Il est clair que pour tout x de $\mathbb{R}$, $v'(x) < 0$. D'où v est strictement decroissante sur $\mathbb{R}$.

On a

$$\begin{cases} V(0{,}4) = 1{,}3\times10^{-3} > 0 \\ V(0{,}5) = -0{,}12 < 0 \end{cases}$$

Donc $V(0{,}4)\times V(0{,}5)<0$ D'apres le théorème des valeurs intermediaires, l'equation $V(x)=0$ admet une solution α telle que $0{,}4<\alpha<0{,}5$. (V est continue sur $[0{,}4;0{,}5]$ et change de signe). D'apres le theoreme de la bijection reciproque (V est continue et strictement monotone).

La solution α est unique



d) par symetrie, l'aire cherchée A est egale au double de l'aire comprise entre (C), la droite $y=x$ et les droites verticales d'equations $x=\alpha$ et $x=0$ (l'axe oy)

$$A = 2\int_0^{\alpha} (f(x)-x)\,dx$$

$$A = 2\int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{e^x+1} - x\right) dx$$

$$A = 2\int_0^{\alpha} \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\right) dx$$

$$A = -2\int_0^{\alpha}\left(\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}+x\right)dx$$

$$A = -2\left[-\ln(1+e^{-x})+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\alpha}$$

$$A = 2\left[\ln(1+e^{-x})-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\alpha}$$

$$A = 2\left(\ln(1+e^{-\alpha})-\frac{1}{2}\alpha^2-\ln 2\right)$$

$$A = 2\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{2}\right)-\alpha^2$$

$$A = 2\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{2}\right)-\alpha^2$$

$$A = 2\ln\left(\frac{1+e^{\alpha}}{2e^{\alpha}}\right)-\alpha^2 \text{ en unité d'aire.}$$

3) On a $I_n = \int_0^{\alpha} f^n(t)\,dt$

a) $$I_1 = \int_0^{\alpha}\frac{1}{e^t+1}\,dt$$

$$I_1 = \int_0^{\alpha}\frac{1}{e^t+1}\times\frac{e^{-t}}{e^{-t}}\,dt$$

$$I_1 = -\int_0^{\alpha}\frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt$$

$$I_1 = \left[-\ln(1+e^{-t})\right]_0^{\alpha}$$

$$I_1 = -\ln(1+e^{-\alpha})+\ln 2$$

$$I_1 = -\ln\left(\frac{e^{\alpha}+1}{e^{\alpha}}\right)+\ln 2$$

$$I_1 = \ln\left(\frac{1}{e^{\alpha}+1}e^{\alpha}\right)+\ln 2$$

$I_1 = \ln(\alpha e^{\alpha})+\ln 2$ Car $f(\alpha)=\alpha \Rightarrow \dfrac{1}{e^{\alpha}+1}=\alpha$

$$I_1 = \ln(\alpha)+\ln e^{\alpha}+\ln 2$$

$$I_1 = \alpha+\ln(2\alpha).$$

3) a) On a : $f'(x) = \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}$

$$f^2(x) - f(x) = \frac{1}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{1+e^x} \times \frac{1+e^x}{1+e^x}$$

$$= \frac{1}{(1+e^x)^2} - \frac{1+e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} = f'(x)$$

Donc : $f'(x) = f^2(x) - f(x)$

c) D'après b), en multipliant par $f^{n-1}(x)$ on obtient :

$f'(x)f^{n-1}(x) = f^{n+1}(x) - f^n(x)$

par intégration de 0 à α : $\displaystyle\int_0^\alpha f'(x)f^{n-1}(x)\,dx = \int_0^\alpha f^{n+1}(x)\,dx - \int_0^\alpha f^n(x)\,dx$

$\left[\frac{1}{n} f^n(x)\right]_0^\alpha = I_{n+1} - I_n$

$\frac{1}{n}\left(f^n(\alpha) - f^n(0)\right) = I_{n+1} - I_n$

$\frac{1}{n}\left(\alpha^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = I_{n+1} - I_n$

d) On a $\alpha > 0$ et pour tout entier naturel non nul n f^n est continue et positive sur $[0, \alpha]$. Alors $\displaystyle\int_0^\alpha f^n(t)\,dt \geq 0$. D'où $I_n \geq 0$. Donc (I_n) est positive.

D'autre part pour tout entier naturel non nul n on a :

$0 < \alpha < 0{,}5 \Rightarrow 0 < \alpha^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \alpha^n < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \alpha^n - \frac{1}{2^n} < 0$

$\Rightarrow I_{n+1} - I_n < 0$

D'où (I_n) est décroissante.

On en deduit que la suite (I_n) est convergente car decroissante et minorée

4)

a) On sait que f est decroissante sur $\mathbb{R}$. Donc ; si $0 \leq t \leq \alpha$

On a : $f(\alpha) \leq f(t) \leq f(0)$

donc $\alpha \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$ et $\alpha > 0 \Rightarrow 0 < \alpha^n \leq f^n(t) \leq \frac{1}{2^n}$

$$\Rightarrow \int_0^\alpha \alpha^n dt \leq \int_0^\alpha f^n(t)dt \leq \int_0^\alpha \frac{1}{2^n} dt$$

$$\alpha^n [t]_0^\alpha \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}[t]_0^\alpha$$

$$\alpha^n(\alpha - 0) \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}(\alpha - 0)$$

$$\alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$$

Comme $0 < \alpha < 1$, on a $\lim_{x \to +\infty} \alpha^{n+1} = 0$. On a aussi $\lim_{+\infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0$

Alors d'apres le theoreme de gendarmes $\lim_{+\infty} I_n = 0$

b) On a pour tout $n > 0$: $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$

Donc

$$\begin{cases} \text{pour } n = 1 : & I_2 - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \\ \text{pour } n = 2 : & I_3 - I_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right) \\ \text{pour } n = 3 : & I_4 - I_3 = \frac{1}{3}\left(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}\right) \\ \vdots & \\ \text{pour } n - 1 : & I_n - I_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \end{cases}$$

par addition membre a membre et simplification

$$I_n - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3}\left(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$I_n = I_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$$

$$I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$$

On peut ecrire $I_n - (\alpha + \ln(2\alpha)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$

par passage aux limites:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right) = \lim_{+\infty} I_n - \lim_{+\infty} (\alpha + \ln(2\alpha))$$

Comme $\lim_{+\infty} I_n = 0$ et $\lim_{+\infty} (\alpha + \ln(2\alpha)) = \alpha + \ln(2\alpha)$ car independant de n ; on en deduit que

$$\lim_{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right) = -(\alpha + \ln(2\alpha)).$$

Exercice 14

1) a) pour transformation d'ecriture de $g(x)$, on factorise le denominateur et le numerateur :

On factorise le denominateur par x : $x^3 - 4x^2 + 5x = x(x^2 - 4x + 5)$.

pour factoriser le numerateur on peut utiliser la division euclidienne, l'identification ou le tableau d'Horner:

	3	-12	19	-10
1		3	-9	10
	3	-9	10	0

Alors $3x^3 - 12x^2 + 19x - 10 = (x-1)(3x^2 - 9x + 10)$

Donc on a pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $g(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2-9x+10)}{x(x^2-4x+5)}$

Alors : $a = 3$, $b = -9$ et $c = 10$

) Les discriminants des trinôme $3x^2 - 9x + 10$ et $x^2 - 4x + 5$ sont negatifs : $\Delta_1 = -39$ et $\Delta_2 = -4$. Les coefficients de x^2 sont positifs. On en deduit que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $3x^2 - 9x + 10 > 0$ et $x^2 - 4x + 5 > 0$, D'où le signe de $g(x)$ est celui de $\dfrac{x-1}{x}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x-1}{x}$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$		$+$		$-$		$+$	

2)

a) On a $\lim\limits_{0} (3x-3) = -3$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-4x+5}{x^2} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right) =$

Alors $\lim\limits_{0} f(x) = +\infty$

La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équat° $x = 0$

b) On a $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2-4x+5}{x^2} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right) = 0$ Donc $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} (3x-3)$. D'où $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = -\infty$

) D'apres a) la Courbe (C) admet une asymptote verticale d'equation $x=0$.

De plus $\lim\limits_{\pm\infty} (f(x)-(3x-3)) = \lim\limits_{\pm\infty} \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right) = 0$ donc la Courbe (C) admet une asymptote oblique D d'equat° $y = 3x-3$.

pour etudier la position relative de (C) et de D, on etudie le signe de $d(x) = f(x) - y = f(x) - (3x-3)$

$$d(x) = \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)$$

On rappelle que le signe de $\ln t$ est celui de $t-1$ pour tout $t>0$. Alors le signe de $d(x) = \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)$ est celui de $\frac{x^2-4x+5}{x^2} - 1$.

par reduction au même denominateur : $\frac{x^2-4x+5}{x^2} - 1$

$$= \frac{x^2-4x+5-x^2}{x^2} = \frac{-4x+5}{x^2}$$

Donc le signe de $d(x)$ est celui de $-4x+5$ car $x^2>0$

x	$-\infty$	0	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$-4x+5$	$+$	$+$	0	$-$
$d(x)$	$+$	$+$		$-$
P.R	C/D	C/D		D/C

pour $x = \frac{5}{4}$ on a $y = 3 \times \frac{5}{4} - 3 = \frac{3}{4}$. Alors l'asymptote Δ coupe la courbe (C) au point $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

3)
i) On peut ecrire $f(x) = 3x - 3 + \ln(x^2 - 4x + 5) - \ln(x^2)$

$f(x) = 3x - 3 + \ln(x^2 - 4x + 5) - 2\ln x$. Donc $f'(x) = 3 + \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5} - \frac{2}{x}$

$$f'(x) = 3 + \frac{(2x-4)x - 2(x^2 - 4x + 5)}{x(x^2 - 4x + 5)}$$

$$f'(x) = \frac{3(x^3 - 4x^2 + 5x) + 2x^2 - 4x - 2x^2 + 8x - 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3 - 12x^2 + 19x - 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

Enfin $f'(x) = g(x)$

Tableau de variation de f :

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖ $-$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖ $+\infty \searrow$	$\ln 2 \nearrow$	$+\infty$

b) Sur l'intervalle $]0,+\infty[$, on a $f(x) \geq \ln 2 > 0$, Donc l'equation $f(x)=0$ n'admet pas de solution dans ~~cette~~ cet intervalle.

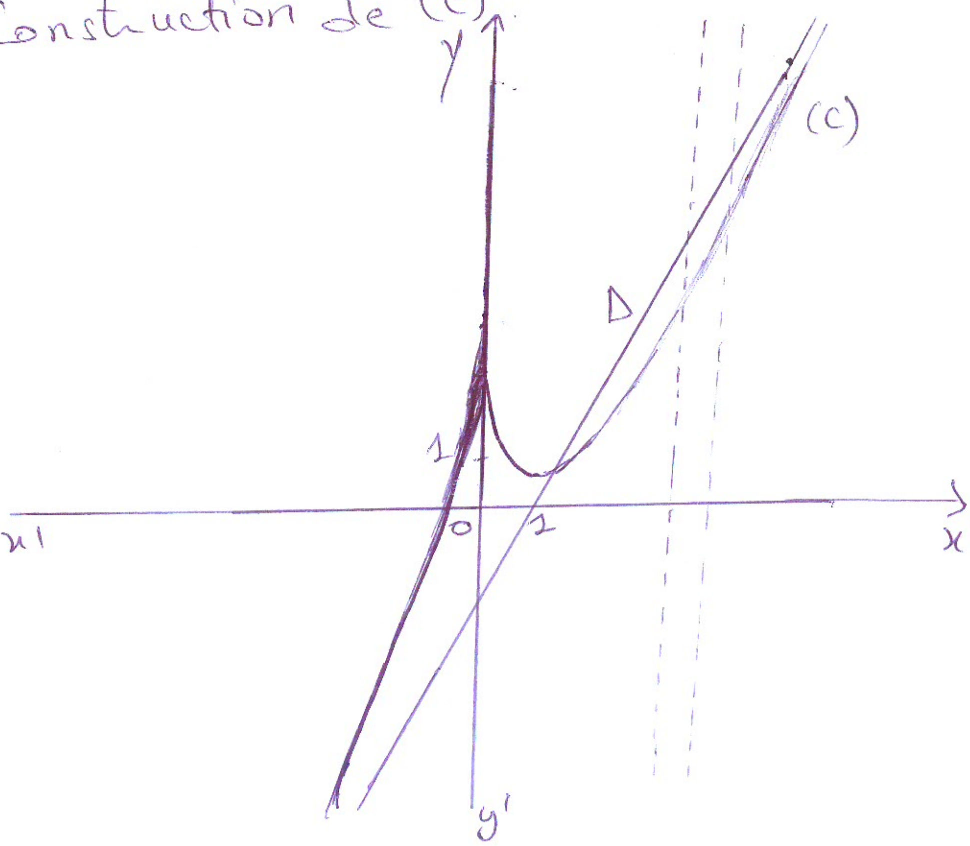
Sur l'intervalle $]-\infty,0[$, la restriction f est continue, strictement monotone et change de signe car $0 \in f(]-\infty,0[) =]-\infty,+\infty[$. Donc l'equation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans cet intervalle.

Alors l'equation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}^*$.

pour encadrer α : $\left| \begin{array}{l} f(-1) = -6+\ln 10 < 0 \\ \lim\limits_{0^-} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow -1 < \alpha < 0$

$\left. \begin{array}{l} f(-0{,}5) = -4{,}5+\ln 29 < 0 \\ \lim\limits_{0} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow -0{,}5 < \alpha < 0$ C'est un encadrement de α d'amplitude 5×10^{-1}

c) Construction de (C)



1)

1) $$2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+(x-2)^2}\right)=2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+x^2-4x+4}\right)$$

$$=2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{x^2-4x+5}\right)$$

$$=2\left(1+\frac{2x-4-1}{x^2-4x+5}\right)$$

$$=2\left(\frac{x^2-4x+5+2x-5}{x^2-4x+5}\right)$$

$$=2\left(\frac{x^2-2x}{x^2-4x+5}\right)$$

$$=\frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}$$

Alors $\dfrac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}=2\left(1+\dfrac{2x-4}{x^2-4x+5}-\dfrac{1}{1+(x-2)^2}\right)$

b) $A=\displaystyle\int_3^{2+\sqrt{3}}\frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx=\left[\ln(x^2-4x+5)\right]_3^{2+\sqrt{3}}$ Car une primitive de fonction du type $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln(u)$.

En remplaçant par les bornes

$$A=\ln\left((2+\sqrt{3})^2-4(2+\sqrt{3})+5\right)-\ln\left((3)^2-4(3)+5\right)=\ln 4-\ln 2$$
$$=\ln 2$$

c) En posant $x=2+\tan t$ avec $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; on a:

$$\begin{cases} x=3 \Rightarrow 2+\tan t=3 \Rightarrow \tan t=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \\ x=2+\sqrt{3} \Rightarrow 2+\tan t=2+\sqrt{3} \Rightarrow \tan t=\sqrt{3} \Rightarrow t=\cancel{\frac{\pi}{4}}\ \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$x = 2 + \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t)\,dt$

$x = 2 + \tan t \Rightarrow 1 + (x-2)^2 = 1 + \tan^2 t$

pour Calculer $B = \displaystyle\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx$, on remplace avec le changement de variable :

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2 t}(1+\tan^2 t)\,dt$$

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt$$

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx = \left[t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

Enfin $B = \frac{\pi}{12}$

d) i) pour calculer $J = \displaystyle\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2 - 4x + 5)\,dx$ à l'aide d'une integration par parties

on pose $\begin{cases} u(x) = \ln(x^2 - 4x + 5) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

Alors $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{2x-4}{x^2 - 4x + 5} \\ v(x) = x \end{cases}$

D'où $J = \left[x\ln(x^2-4x+5)\right]_3^{2+\sqrt{3}} - \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}\,dx$

On remplace dans la première partie par les bornes, et dans l'intégrale par l'expression trouvée en 4)a)

$$J = (2+\sqrt{3})\ln\left((2+\sqrt{3})^2-4(2+\sqrt{3})+5\right) - 3\ln\left((3)^2-4(3)+5\right) - \int_3^{2+\sqrt{3}} 2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2}\right)dx$$

$$J = (2+\sqrt{3})\ln 4 - 3\ln 2 - 2\left(\int_3^{2+\sqrt{3}} dx + \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx - \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx\right)$$

D'après 4b) et 4c) on obtient :

$$J = (2+\sqrt{3})\ln 2^2 - 3\ln 2 - 2\left([x]_3^{2+\sqrt{3}} + A - B\right)$$

$$J = 2(2+\sqrt{3})\ln 2 - 3\ln 2 - 2\left(2+\sqrt{3}-3+\ln 2 - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$J = (1+2\sqrt{3})\ln 2 - 2\left(-1+\sqrt{3}+\ln 2 - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$J = (1+2\sqrt{3})\ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} - 2\ln 2 + \frac{\pi}{6}$$

$$J = (-1+2\sqrt{3})\ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}.$$

ii) pour calculer $K = 2\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln x\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties,

On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$

D'où $K = 2\left([x\ln x]_3^{2+\sqrt{3}} - \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{x}\, x\,dx \right)$

$K = 2\left([x\ln x]_3^{2+\sqrt{3}} - \int_3^{2+\sqrt{3}} dx \right)$

$K = 2\left([x\ln x]_3^{2+\sqrt{3}} - [x]_3^{2+\sqrt{3}} \right)$

$K = 2\left([x\ln x - x]_3^{2+\sqrt{3}} \right)$

$K = 2\left((2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3}) - 3\ln 3 + 3 \right)$

$K = 2\left((2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 1 - \sqrt{3} - 3\ln 3 \right)$

$K = (4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 2 - 2\sqrt{3} - 6\ln 3.$

iii) pour calculer l'aire S du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $y = 3x-3$; $x = 3$ et $x = 2+\sqrt{3}$; on remarque que pour $x \geq 3$, la droite d'équation $y = 3x-3$ est au dessus de la courbe.

Alors $S = \int_3^{2+\sqrt{3}} (y - f(x))\,dx = -\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)dx$

$S = -\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2-4x+5)\,dx + \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2)\,dx$. Donc $S = -J + K$

$S = -\left((-1+2\sqrt{3})\ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \right) + \left((4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 2 - 2\sqrt{3} - 6\ln 3 \right)$

$S = (1-2\sqrt{3})\ln 2 - 2 + 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} + (4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 2 - 2\sqrt{3} - 6\ln 3$

$S = (1-2\sqrt{3})\ln 2 + (4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) - 6\ln 3 - \frac{\pi}{6}$ en unité d'aire

$S \simeq 1{,}0066$ en unité d'aire.

fin