Aicha Mohamed Lemane
école : Elmaarif

N : 1744
Baccalauréat : 2015

classe : 7C1
Session Normale

Exercice 1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1) On pose : $P(Z) = Z^3 - (11+6i)z^2 + (28+38i)z - 12 - 60i$

a) $P(3)$

$P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$

tableau d'horner :

	1	$-11-6i$	$28+38i$	$-12-60i$
3	↓	3	$-24-18i$	$12+60i$
	1	$-8-6i$	$4+20i$	0

Alors $P(3) = 0$ et pour tout z de $\mathbb{C}$:

$P(z) = (z-3)(z^2 + (-8-6i)z + 4 + 20i)$

Donc $a = -8-6i$ et $b = 4+20i$

b) L'équation $P(z) = 0$ équivaut à $z - 3 = 0$ ou $z^2 + (-8-6i)z + 4 + 20i = 0$

on a $z - 3 = 0 \Rightarrow z = 3$

Le discriminent de l'équation du second degré est

$\Delta = (-8-6i)^2 - 4(4+20i) = 64 - 36 + 96i - 16 - 80i$

$\Delta = 12 + 16i = (4+2i)^2$

Donc $\delta = 4 + 2i$

Les solutions sont :

$z_1 = \frac{8+6i+4+2i}{2} = 6+4i$ et

$z_2 = \frac{8+6i-4-2i}{2} = 2+2i$

Conclusion : L'ensemble de solution de l'équation $P(z) = 0$

$S = \{3 ; 6+4i ; 2+2i\}$

c) Les points A, B et C sont les image des solution de l'équation $P(z) = 0$ avec $Im(z_A) < Im(z_B) < Im(z_C)$

Donc $z_A = 3$, $z_B = 2+2i$ et $z_C = 6+4i$

G barycentre du système $\{(A;2);(B;-2);(C;2)\}$. G est alors le quatrième sommet du parallélogramme ABC

l'affixe de G est : $z_G = \frac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2-2+2}$

$z_G = \frac{2(3) - 2(2+2i) + 2(6+4i)}{2}$

$= \frac{14+4i}{2} = 7 + 2i$

2) L'application f_k du plan dans lui-même qui a tout point M du plan associe le point M' tel que

$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC}$

Cette question sera traitée par deux méthodes : Calcul vectoriel ou nombres complexes

Méthode 1 : calcul vectoriel

a) L'application f_k est une translation si le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est constant.

La fonction vectorielle de leibniz $(M \mapsto 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC})$ est constante si et seulement si le poids du système $\{(A;2);(B;-2);(C;3-k)\}$ est nul. Ce qui équivaut à $3-k = 0$ soit $k = 3$

Aicha Mohamed Lemane   N: 1744   classe: 7C1
école : Elmaarif   Baccalauréat : 2015   Session Normale

Suite de l'exercice 1:

Alors, f_K est une translation si et selement si $K=3$. On obtient son vecteur en remplaçant M dans l'expression vectorielle $\vec{v}=2\vec{MA}-2\vec{MB}+(3-K)\vec{MC}$ par n'importe quel point. Pour M en C on obtient $\vec{v}=2\vec{CA}-2\vec{CB}=2\vec{BA}$.

b) Si $K\neq 3$, le poids du systéme $\{(A;2),(B;-2),(C;3-K)\}$ est non nul. Donc ce systéme admet un barycentre G_K et on a pour tout point M du plan $2\vec{MA}-2\vec{MB}+(3-K)\vec{MC}=(3-K)\vec{MG_K}$. Donc:
$f_K(M)=M' \Rightarrow \vec{MM'}=(3-K)\vec{MG_K}$
$f_K(M)=M' \Rightarrow \vec{MG_K}+\vec{G_KM'}=(3-K)\vec{MG_K}$
$\Rightarrow \vec{G_KM'}=(2-K)\vec{MG_K}$

En fin, $f_K(M)=M' \Rightarrow \vec{G_KM'}=(K-2)\vec{G_KM}$

Particulièrement, pour $K=2$ on a:
$f_2(M)=M' \Rightarrow \vec{G_2M'}=\vec{0} \Rightarrow M'=G_2$ donc l'application f_2 est constante.

G_2 est le barycentre du systéme $\{(A,-2),(B,-2),(C,1)\}$. Alors $\vec{CG_2}=2\vec{CA}-2\vec{CB}=2\vec{BA}$.

Donc $\vec{CG_2}=2\vec{CG}$. Alors G_2 est le symétrique de C par rapport á G.

Maintenant, si $K\in\mathbb{R}/\{2;3\}$ et M un point invariant par f_K, alors invariant $\Omega_K=G_K=bar\{(A,2),(B,-2)$ $(C,3-K)\}$

f_K est l'homothétie de centre Ω_K et rapport $K-2$

c) l'affixe de Ω_K est $z_K=\frac{20-6K+(8-4K)i}{3-K}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_K=\frac{20-6K}{3-K}=\frac{6K-20}{K-3} \\ y_K=\frac{8-4K}{3-K}=\frac{4K-8}{K-3}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_K=6-\frac{2}{K-3} \\ y_K=4+\frac{4}{K-3}\end{cases} \Rightarrow 2x+y-16=0.$$ C'est l'équation d'une droite Δ.

Comme $(x_K,y_K)=\left(6-\frac{2}{K-3},4+\frac{4}{K-3}\right)$ avec $\frac{2}{K-3}\neq 0$ et $\frac{4}{K-3}\neq 0$. On a $(x_K,y_K)\neq(6,4)$. Donc $\Omega_K\neq C(6,$
Comme $K\neq 2$ on a $(x_K,y_K)\neq(x_2,y_2)$
$\Rightarrow (x_K,y_K)\neq\left(6-\frac{2}{2-3},4+\frac{4}{2-3}\right)$

$\Rightarrow (x_K,y_K)\neq(8,0)$, donc $\Omega_K\neq G_2(0,8)$

Conclusion: Le lieu géométrique des points Ω_K lorsque K décrit $\mathbb{R}/\{2;$ est la droite Δ d'équation $2x-y-16$ privée de $C(6,4)$ et $G_2(8,0)$

Pour $K=1$, $\Omega_1=G_1=bar\{(A,-2)$ $(B,-2),(C,2)\}$. C'est le quatrième sommet du parallélogramme $ABCG_1$, avec $\begin{cases} x_1=\frac{14}{2}=7 \\ y_1=\frac{4}{2}=2\end{cases}$ Donc $\Omega(7;$

d) L'affixe de M' est: $z'=(K-2)z+20=6K+(8-4K)i$. Pour $K=1$, on a $z'=-z+14+4i$.

Suite de l'exercice 1 :

Alors l'affixe du point R centre de gravité du triangle AMM' est

$z_R = \frac{z_A + z + z'}{3}$

$z_R = \frac{z + (-z + 14 + 4i) + 3}{3}$

$z_R = \frac{17 + 4i}{3} = \frac{17}{3} + \frac{4}{3}i$. Alors lorsque M décrit le cercle Γ de centre G passant par C, le point R reste fixe.

3) Pour tout point M du plan on a $f(M) = 2MA^2 - 2MB^2 + 2MC^2$ et Γ_m l'ensemble des points M tels que $f(M) = m$, où m est un réel.

La somme des coefficients est égale à 2 (non nulle). Le barycentre G de ce système est le point $\Omega(7,2)$

Alors, par transformation d'écriture on obtient l'écriture réduite $f(M) = 2MG^2 + f(G)$

Donc $M \in \Gamma_m \Rightarrow 2MG^2 + f(G) = m$

soit $MG^2 = \frac{m - f(G)}{2}$

Calculons f(G) :

On a $f(G) = 2GA^2 - 2GC^2$. On remarque que G est le point $\Omega_1(7,2)$

Donc : $GA^2 = |z_A - z_G|^2 = |3 - 7 - 2i|^2 = |-4 - 2i|^2 = 20$

$GB^2 = |z_B - z_G|^2 = |2 + 2i - 7 - 2i|^2 = |-5|^2 = 25$

$GC^2 = |z_C - z_G|^2 = |6 + 4i - 7 - 2i|^2 = |-1 + 2i|^2 = 5$

Alors $f(G) = 2GA^2 - 2GB^2 + 2GC^2$

$f(G) = 2 \times 20 - 2 \times 25 + 2 \times 5$

Enfin $f(G) = 0$. Donc $M \in \Gamma_m \Rightarrow MG^2 = \frac{m}{2}$

Discussion suivant les valeurs de m

$m < 0$: Γ_m est l'ensemble vide

$m = 0$: Γ_m est le point G

$m > 0$: Γ_m est le cercle de centre G et de rayon $r = \sqrt{\frac{m}{2}}$

b) D'après les résultats précédents pour $m = 10$, l'ensemble est un cercle de centre G et de rayon $r = \sqrt{\frac{m}{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}$. Comme $GC^2 = 5$ ce cercle passe par C. Donc Γ_{10} est le cercle de centre G passant par C.

Aicha Mohamed Lemane
école: Elmaarif

N: 1744
Baccalauréat: 2015

classe: 7c1
Session Normale

Exercice 3:

$f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

1. a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$ car $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Interprétation graphique:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \Rightarrow$ (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$

b) $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$ On constate que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $+\infty$
f'	$-$
f	$1 \searrow 0$

$\begin{cases} f \text{ est continue,} \\ \text{et strictement décroissante sur } \mathbb{R}, \\ f(\mathbb{R}) =]0;1[\end{cases}$

Alors $f : \mathbb{R} \to]0,1[$ est bijective;

$J =]0,1[$

Pour exprimer $f^{-1}(x)$, on pose $y = f(x)$

on a: $y = \frac{1}{1+e^x} \Rightarrow y(1+e^x) = 1$

$\Rightarrow y + ye^x = 1 \Rightarrow ye^x = 1-y$

$\Rightarrow e^x = \frac{1-y}{y} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$

D'où : $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$, $x \in]0,1[$

2. a) On vérifie une égalité du typ

$f(2a-x) + f(x) = 2b$ avec $(a,b) = (0,$

On a: $f(2a-x) = f(-x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{e}{e}$

Donc, $f(2a-x) + f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{1}{1+e}$

$f(2a-x) + f(x) = \frac{e^x+1}{e^x+1} = 1 = 2 \times \frac{1}{2} = 2$

D'où $\Omega(0, \frac{1}{2})$ est un centre de sym

symétrique de la courbe (c)

b) Les courbes (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

s'il se coupent en un point d'abscisse x, alors x vérifie $f(x) = x$, soit $f(x) - x = 0$

on pose $V(x) = f(x) - x$

V est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, avec $V'(x) = f'(x) - 1$.

$V'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} - 1 = \left(1 + \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)$

Il est clair que pour tout x de $\mathbb{R}$, $V'(x) < 0$. D'où V est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

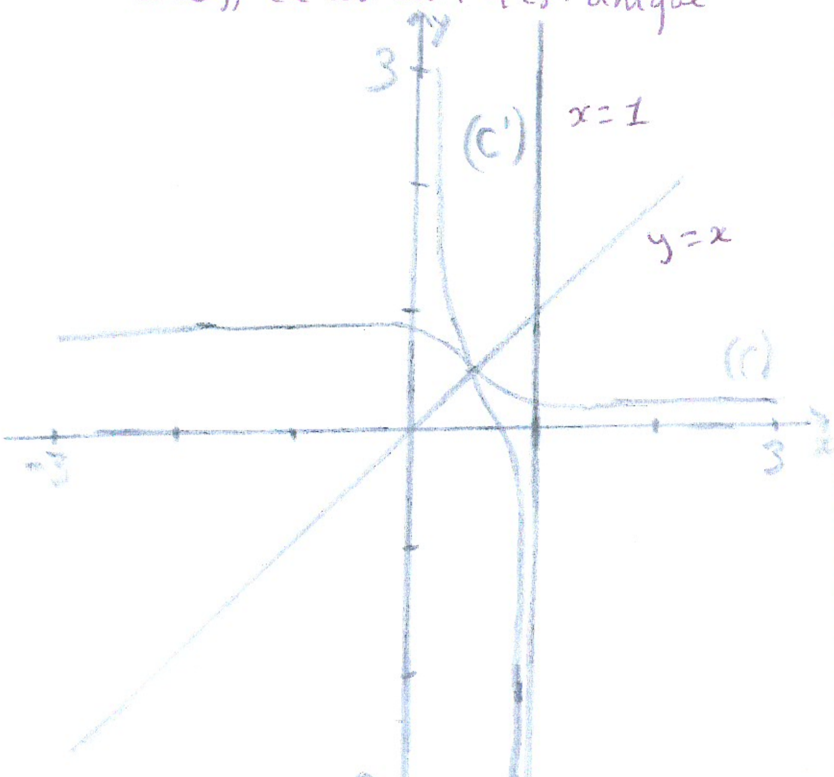
On a

$\begin{cases} V(0,4) = 1,3 \times 10^{-3} > 0 \\ V(0,5) = -0,12 < 0 \end{cases}$

Aicha Mohamed Lemane — N: 1744 — classe: 7c1
école: Elmaarif — Baccalauréat: 2015 — Session Normale

Suite de l'exercice 3:

Donc $V(0,4) \times V(0,5) < 0$. D'aprés le théoréme des valeurs intermédiaires, l'équation $V(x) = 0$ admet une solution α telle que $0,4 < \alpha < 0,5$. (V est continue sur $[0,4 ; 0,5]$ et change de signe).
D'aprés le théoréme de la bijection réciproque (V est continue est strictement monotone), la solution α est unique



d) Par symétrie, l'aire cherchée A est égale au double de l'aire comprise entre (C), la droite $y=x$ et les droites verticales d'équations $x=\alpha$ et $x=0$ (l'axe Oy)

$$A = 2\int_0^\alpha (f(x) - x)\,dx$$

$$A = 2\int_0^\alpha (f(x) - x)\,dx$$

$$A = 2\int_0^\alpha \left(\frac{1}{e^x+1} - x\right) dx$$

$$A = 2\int_0^\alpha \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} - x\right) dx$$

$$A = -2\int_0^\alpha \left(\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} + x\right) dx$$

$$A = -2\left[\ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{2}x^2\right]_0^\alpha$$

$$A = 2\left[\ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{2}x^2\right]_0^\alpha$$

$$A = -2\left(-\ln(1+e^{-\alpha}) - \frac{1}{2}\alpha^2 + \ln 2\right)$$

$$A = -2\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{2}\right) - \alpha^2$$

$A = 2\ln\left(\dfrac{2e^\alpha}{1+e^\alpha}\right) - \alpha^2$ en unité d'

3) On a $I_n = \int_0^\alpha f^n(t)\,dt$

a) $I_1 = \int_0^\alpha f(t)\,dt$

$$I_1 = \int_0^\alpha \frac{1}{e^t+1}\,dt$$

$$I_1 = \int_0^\alpha \frac{1}{e^t+1} \times \frac{e^{-t}}{e^{-t}}\,dt$$

$$I_1 = -\int_0^\alpha \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt$$

$$I_1 = \left[-\ln(1+e^{-t})\right]_0^\alpha$$

$I_1 = \left[-\ln(1+e^{-t})\right]_0^\alpha \Rightarrow I_1 = -\ln(1+e^{-\alpha}$

$$I_1 = -\ln\left(\frac{e^\alpha+1}{e^\alpha}\right) + \ln 2$$

$$I_1 = \ln\left(\frac{1}{e^\alpha+1}e^\alpha\right) + \ln 2$$

$I_1 = \ln(\alpha e^\alpha) + \ln 2$ car $f(\alpha) = \alpha \Rightarrow \dfrac{1}{e^\alpha+1} = \alpha$

$$I_1 = \ln(\alpha) + \ln e^\alpha + \ln 2$$

$$I_1 = \alpha + \ln(2\alpha)$$

Aicha Mohamed Lemane
école : Elmaarif
N : 1744
Baccalauréat : 2015
classe : 7C1
Session Normale

Suite de l'exercice 3

3. a) On a : $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^{-x})^2}$

$f^2(x) = \frac{1}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{1+e^x} \times \frac{1+e^x}{1+e^x}$

$= \frac{1}{(1+e^x)^2} - \frac{1+e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} = f'(x)$

Donc : $f'(x) = f^2(x) - f(x)$

c) D'après b) en multipliant par $f^{n-1}(x)$ on obtient : $f'(x) f^{n-1}(x) = f^{n+1}(x) - f^n(x)$

Par intégration de 0 à α :

$\int_0^\alpha f'(x) f^{n-1}(x)dx = \int_0^\alpha f^{n+1}(x)dx - \int_0^\alpha f^n(x)dx$

$\left[\frac{1}{n} f^n(x)\right]_0^\alpha = I_{n+1} - I_n$

$\frac{1}{n}\left(f^n(\alpha) - f^n(0)\right) = I_{n+1} - I_n$

$\frac{1}{n}\left(\alpha^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = I_{n+1} - I_n$

$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$

d) On a $\alpha > 0$ et pour tout entier naturel non nul n, f^n est continue et positif sur $[0, \alpha]$. Alors $\int_0^\alpha f^n(t) \geq 0$. D'on $I_n \geq 0$.
Donc (I_n) est positive.
D'autre part, pour tout entier naturel non nul n on a :

$0 < \alpha < 0{,}5 \Rightarrow 0 < \alpha^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow$

$\alpha^n < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \alpha^n - \frac{1}{2^n} < 0 \Rightarrow I_{n+1} - I < 0$

D'on (I_n) est décroissante.

On en déduit que la suite (I_n) est convergente, car décroissante et mino.

4. a) On sait que f est décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc, si $0 \leq t \leq \alpha$,
on a : $f(\alpha) \leq f(t) \leq f(0)$
donc $\alpha \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ et $\alpha > 0 \Rightarrow$

$0 \leq \alpha^n \leq f^n(t) \leq \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow \int_0^\alpha \alpha^n dt \leq \int_0^\alpha f^n(t)dt \leq \int_0^\alpha \frac{1}{2^n} dt$

$\alpha^n [t]_0^\alpha \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}[t]_0^\alpha$

$\alpha^n(\alpha - 0) \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}(\alpha - 0)$

$\alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$

Comme $0 < \alpha < 1$, on a $\lim_{x \to +\infty} \alpha^{n+1} = 0$

On a aussi $\lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0$

Alors d'après le théorème de gendarme : $\lim_{x \to +\infty} I_n = 0$

b) On a pour tout $n > 0$: $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$

Donc

pour $n = 1$: $I_2 - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$

pour $n = 2$: $I_3 - I_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right)$

pour $n = 3$: $I_4 - I_3 = \frac{1}{3}\left(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}\right)$

$\vdots$

pour $n - 1$: $I_n - I_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$,

Par addition membre à membre et simplification :

Aicha Mohamed Lemane
école : Elmaarif

N : 1744
Baccalauréat : 2015

classe : 7C1
Session Normale

Suite de l'exercice 3 :

$I_n - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3}\left(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$I_n = I_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$

$I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$

~~On~~ Par peut écrire $I_n - (\alpha + \ln(2\alpha)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$

Par passage aux limites :

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right) = \lim_{n\to+\infty} I_n - \lim_{n\to+\infty} (\alpha + \ln(2\alpha))$

Comme $\lim_{x\to+\infty} I_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} (\alpha + \ln(2\alpha)) = \alpha + \ln(2\alpha)$ car indépendand de n ; on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right) = -(\alpha + \ln(2\alpha))$.

Aicha Mohamed Lemane
école : Elmaarif

N : 1744
Baccalauréat : 2015

Classe : 7C1
Session Normale

Exercice 4 :

1. a) Pour la transformation d'écriture de $g(x)$, on factorise le dénominateur et le numérateur :
on factorise le dénominateur par x : $x^3-4x^2+5x = x(x^2-4x+5)$
tableau d'horner :

	3	-12	19	-10
1	↓	3	9	10
	3	-9	10	0

Alors $3x^3-12x^2+19x-10 = (x-1)(3x^2-9x+10)$
Donc on a pour tout x de $\mathbb{R}$:
$g(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2-9x+10)}{x(x^2-4x+4)}$

Alors : $a=3$, $b=-9$, $c=10$

b) Les discriminants des trinôme $3x^2-9x+10$ et x^2-4x+5
$\Delta_1 = -4$. Les coefficients de x^2 sont positifs. On en déduit que pour tout x de $\mathbb{R}$:
$3x^2-9x+10>0$ et $x^2-4x+5>0$.
D'où le signe de $g(x)$ est celui de $\frac{x-1}{x}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$x-1$	$-$		$-$ 0	$+$
$\frac{x-1}{x}$	$+$		$-$ 0	$+$
$g(x)$	$+$		$-$ 0	$+$

2. a) On a $\lim\limits_{x\to 0}(3x-3) = -3$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-4x+5}{x^2} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right) = +\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$
La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$

b) On a $\lim \dfrac{x^2-4x+5}{x^2} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right) = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(3x-3)$. D'où
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

c) D'après a), la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$
De plus $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right) = 0$, donc la courbe (C) admet une asymptote oblique D d'équation $y=3x-3$
Pour étudier la position relative de (C) et D, on étudie le signe de
$d(x) : f(x) - y = f(x) - (3x-3)$
$d(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right)$

On rappelle que le signe de $\ln t$ est celui de $t-1$ pour tout $t>0$.
Alors le signe de $d(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-4x+4}{x^2}\right)$ est celui de $\dfrac{x^2-4x+5}{x^2} - 1$

Aicha Mohamed Lemane
école: Elmaarif

N: 1744
Baccalauréat 2015

classe: 7c1
Session Normale

Suite de l'exercice 4:
Par réduction au même dénominateur :

$$\frac{x^2-4x+5}{x^2}-1=\frac{x^2-4x+5-x^2}{x^2}=\frac{-4x+5}{x^2}$$

Donc le signe de $d(x)$ est celui de $-4x+5$ car $x^2>0$

x	$-\infty$	0		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$-4x+5$	$+$	||	$+$	0	$-$	
$d(x)$	$+$	||	$+$	0	$-$	
P.R	C/D	||	C/D	0	D/C	

Pour $x=\frac{5}{4}$ on a $y=3\times\frac{5}{4}-3=\frac{3}{4}$.
Alors l'asymptote D coupe la courbe (C) au point $\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$

3.a) On peut écrire $f(x)=3x-3+\ln(x^2-4x+5)-\ln(x^2)$

$f(x)=3x-3+\ln(x^2-4x+5)-2\ln x$.

Donc $f'(x)=3+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{2}{x}$

$$f'(x)=3+\frac{(2x-4)x-2(x^2-4x+5)}{x(x^2-4x+5)}$$

$$f'(x)=\frac{3(x^3-4x^2+5x)+2x^2-4x-2x^2+8x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

$$f'(x)=\frac{3x^3-12x^2+15x+4x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

$$f'(x)=\frac{3x^3-12x^2+19x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

Enfin $f'(x)=g(x)$
Tableau de variation de f :

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

b) Sur l'intervalle $]0,+\infty[$, on a $f(x)\geq\ln 2>0$.
Donc l'équation $f(x)=0$ n'admet ~~que~~ pas de solution dans cet intervalle
Sur l'intervalle $]-\infty,0[$, la restriction monotone et change de signe car $0\in f(]+\infty,0[)=]-\infty;+\infty[$.
Donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans cet intervalle.
Alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

Pour encadrer: $\begin{cases} f(-1)=-6+\ln 10<0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty \end{cases}$ $\Rightarrow -1<\alpha<$

$\begin{cases} f(-0{,}5)=-4{,}5+\ln 29<0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty \end{cases}$

$\Rightarrow -0{,}5<\alpha<0$ c'est une encadrement de α d'amplitude 5×10^{-1}

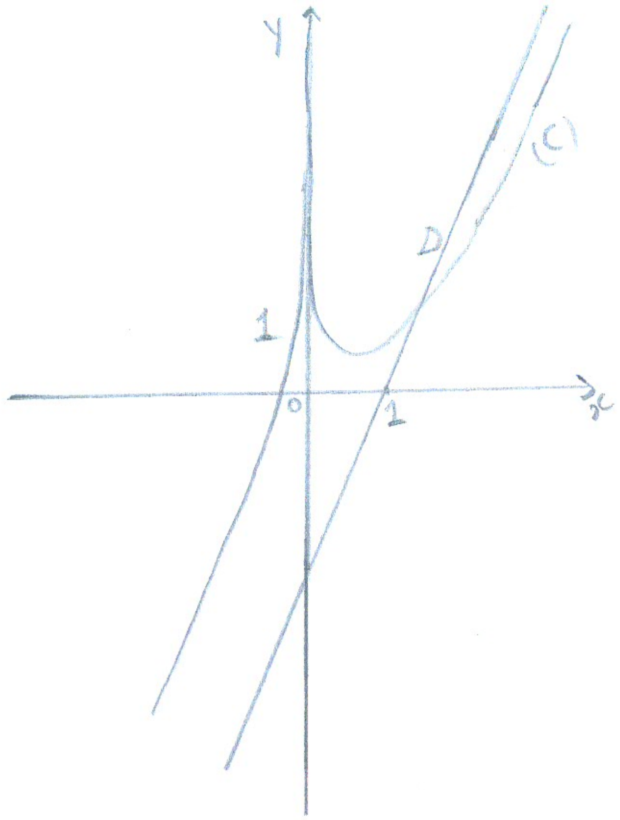
Aicha Mohamed Lemane
école: Elmaarif

N: 1744
Baccalauréat: 2015

Classe: 7c
Session Normale

Suite de l'exercice 4:

c) Construction de (C)



4.a) On a:

$2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+(x-2)^2}\right)$

$=2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+x^2-4x+4}\right)$

$=2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{x^2-4x+5}\right)$

$2\left(1+\frac{2x-4-1}{x^2-4x+5}\right)$

$2\left(\frac{x^2-4x+5+2x-5}{x^2-4x+5}\right)$

$2\left(\frac{x^2-2x}{x^2-4x+5}\right)=\frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}$

Alors $\frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}=2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+(x-2)^2}\right)$

b) $A=\int_3^{2+\sqrt{3}}\frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx=[\ln|x^2-4x+5$

car une primitive de fonction du type $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u|$

En remplaçant par les bornes:

$A=\ln|(2+\sqrt{3})^2-4(2+\sqrt{3})+5|-\ln|(3)^2-4(3)+5|=\ln 4-\ln 2=\ln 2$

c) En posant $x=2+\tan t$ avec $t\in[0,\frac{\pi}{2}[$; on a:

$\begin{cases} x=3 \Rightarrow 2+\tan t=3 \Rightarrow \tan t=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \\ x=2\cancel{0}+\sqrt{3} \Rightarrow 2+\tan t=2+\sqrt{3} \Rightarrow \\ \quad \tan t=\sqrt{3} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \end{cases}$

$x=2+\tan t \Rightarrow dx=(1+\tan^2 t)\,dt$

$x=2+\tan t \Rightarrow 1+(x+2)^2=1+\tan^2$

Pour calculer $B=\int_3^{2+\sqrt{3}}\frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx$,

On remplace avec le changement de variable:

$\int_3^{2+\sqrt{3}}\frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2 t}(1+\tan^2 t)\,dt$

$\int_3^{2+\sqrt{3}}\frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}dt$

$\int_3^{2+\sqrt{3}}\frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx\,[t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$\int_3^{2+\sqrt{3}}\frac{1}{1+(x+2)^2}\,dx=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$

Enfin $B=\frac{\pi}{12}$

Aicha Mohamed Lemane N: 1744 classe: 7c2
école: Elmaarif Baccalauréat: 2015 Session Normale

Suite d'exercice 4:

d) i) Pour calculer $J=\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2-4x+5)\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties,

on pose $\begin{cases} u(x)=\ln(x^2-4x+5) \\ v'(x)=1 \end{cases}$

Alors $\begin{cases} u'(x)=\dfrac{2x-4}{x^2-4x+5} \\ v(x)=x \end{cases}$

D'où $J=\left[x\ln(x^2-4x+5)\right]_3^{2+\sqrt{3}}-\int_3^{2+\sqrt{3}}\dfrac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}\,dx$

On remplace dans la première partie par les borne, et dans l'intégrale par l'expression trouvée 4-a):

$J=(2+\sqrt{3})\ln\left((2+\sqrt{3})^2-4(2+\sqrt{3})+5\right)-3\ln\left((3)^2-4(3)+5\right)-\int_3^{2+\sqrt{3}}2\left(1+\dfrac{2x-4}{x^2-4x+5}-\dfrac{1}{1+(x-2)^2}\right)dx$

$J=(2+\sqrt{3})\ln 4-3\ln 2-2\left(\int_3^{2+\sqrt{3}}dx+\int_3^{2+\sqrt{3}}\dfrac{2x-4}{x^2-4x+5}dx-\int_3^{2+\sqrt{3}}\dfrac{1}{1+(x-2)^2}dx\right)$

D'aprés 4.b) et 4.c) on obtient:

$J=(2+\sqrt{3})\ln 2^2-3\ln 2-2\left([x]_3^{2+\sqrt{3}}+A-B\right)$

$J=2(2+\sqrt{3})\ln 2-3\ln 2-2\left(2+\sqrt{3}-3+\ln 2-\frac{\pi}{12}\right)$

$J=(1+2\sqrt{3})\ln 2-2\left(-1+\sqrt{3}+\ln 2-\frac{\pi}{12}\right)$

$J=(1+2\sqrt{3})\ln 2+2-2\sqrt{3}-2\ln 2+\frac{\pi}{6}$

$J=(-1+2\sqrt{3})\ln 2+2-2\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$

ii) Pour calculer $K=2\int_3^{2+\sqrt{3}}\ln x\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

on pose $\begin{cases} u(x)=\ln x \\ v'(x)=1 \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x} \\ v(x)=x \end{cases}$

D'où $K=2\left([x\ln x]_3^{2+\sqrt{3}}-\int_3^{2+\sqrt{3}}\frac{1}{x}x\,dx\right)$.

$K=2\left([x\ln x]_3^{2+\sqrt{3}}-\int_3^{2+\sqrt{3}}dx\right)$

$K=2\left([x\ln x]_3^{2+\sqrt{3}}-[x]_3^{2+\sqrt{3}}\right)$

$K=2\left([x\ln x-x]_3^{2+\sqrt{3}}\right)$

$K=2\left((2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})-3\ln 3+3\right)$

$K=2\left((2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})+1-\sqrt{3}-3\ln 3\right)$

$K=(4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})+2-2\sqrt{3}-6\ln 3$

iii) Pour calculer l'aire S du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives: $y=3x-3$, $x=3$ et $x=2+\sqrt{3}$;

On remarque que pour $x\geq 3$, la droite d'équation $y=3x-3$ est au dessus de la courbe

Alors $S=\int_3^{2+\sqrt{3}}(y-f(x))\,dx=-\int_3^{2+\sqrt{3}}\ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right)dx$

$S=-\int_3^{2+\sqrt{3}}\ln(x^2-4x+5)\,dx+\int_3^{2+\sqrt{3}}\ln(x^2)\,dx$. Donc

$S=-J+K$

$S=-\int_3^{2+\sqrt{3}}\ln(x^2-4x+5)\,dx+\int_3^{2+\sqrt{3}}\ln(x^2)\,dx$.

$S=(1-2\sqrt{3})\ln 2-2+2\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}+(4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})+2-2\sqrt{3}-6\ln 3$

$S=(1-2\sqrt{3})\ln 2+(4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-6\ln 3-\frac{\pi}{6}$ en unité d'aire.

$S=1{,}0066$ en unité d'aire