Aicha Mohamed Lemane N: 1744 classe: 7C1
école: Elmaarif Baccalauréat: 2013 Session Normale

Exercice 1:

1. a) $25 = 9 \times 2 + 7$

$9 = 7 \times 1 + 2$

$7 = 2 \times 3 + 1$

$* \ 1 = 7 - 2 \times 3$

$= 7 - (9 - 7 \times 1) \times 3$

$= 7 - 9 \times 3 + 7 \times 3$

$= 7 \times 4 - 9 \times 3$

$= (25 - 9 \times 2) \times 4 - 9 \times 3$

Donc $(u, v) = (4, -11)$

$25u + 9v = 1$

$\Rightarrow 25u - 9(-v) = 1$

$\Rightarrow 25(5u) - 9(-5v) = 5$

D'où $(x_0, y_0) = (5 \times 4, -5 \times -11) = (20; 55)$

est une solution particulière de (E)

b) $25x - 9y = 25 \times 20 - 9 \times 55$

$\Rightarrow 25x - 25 \times 20 = 9y - 9 \times 55$

$\Rightarrow 25(x - 20) = 9(y - 55)$

$25 \wedge 9 = 1 \Rightarrow 9 / x - 20$

$\Rightarrow x - 20 = 9K$

$\Rightarrow x = 20 + 9K$

En remplaçant x par $20 + 9K$ on a

$25 \times 9K = 9(y - 55)$

$\Rightarrow y = 25K + 55$

Donc $S: \begin{cases} x = 20 + 9K \\ y = 55 + 25K \end{cases}$

2. a) $d = P.G.C.D(x, y)$

$\Rightarrow d / x$ et d / y

$\Rightarrow d / (25x - 9y) = 5$

$\Rightarrow d / (25x - 9y) = 5$

$\Rightarrow d / 5$

$\Rightarrow d$ est diviseur positif de 5

$\Rightarrow d \in \{1, 5\}$

b) x et y sont premiers entre eux si $d = 1$

c'est-à-dire si x n'est pas divisib car si K n'est pas multiple de 5

c) $(x^2; y^2)$ est une solution de (E)

$25x^2 - 9y^2 = 5$

$\Rightarrow (5x - 3y)(5x + 3y) = 5$

$(5x - 3y) / 5 \Rightarrow$

$\begin{cases} 5x - 3y = 5 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 5x + 3y = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow 10x = 6 \Rightarrow x = 0,6$

impossible car $x \in \mathbb{Z}$

Aicha Mohamed Lemane   N= 1744   classe: 7c2
école : Elmaarif   Baccalauréat: 2013   Session Normale

Exercice 2:

1) $P(Z) = z^3 (9-i)z^2 + (28-5i)z - 32 + 4i$

a) $P(4) = 4^3 - (9-i)\times 16 + 4(28-5i) - 32 + 4i$
$= 64 - 144 + 16i + 112 - 20i - 32 + 4i$
$= 0$

$P(Z) = (Z-4)(Z^2 + aZ + b)$

En utilisant le tableau d'horner:

	1	$-9+i$	$28-5i$	$-32+4i$
4	↓	4	$-20+4i$	$32-4i$
	1	$-5+i$	$8-i$	0

$P(Z) = (Z-4)(Z^2 + (-5+i)Z + 8 - i)$

b) $P(Z) = 0 \Rightarrow Z - 4 = 0 \Rightarrow Z = 4$

ou $Z^2 + (-5+i)z + 8 - i = 0$

$\Delta = (-5+i)^2 - 4\times 1(8-i)$
$= 25 - 10i - 1 - 32 + 4i$
$= -8 - 6i = (1-3i)^2$

$Z_1 = \frac{5 - i + 1 - 3i}{2} = 3 - 2i$

$Z_2 = \frac{5 - i - 1 + 3i}{2} = 2 + i$

$S = \{4, 3-2i, 2+i\}$

2) $A(4)$; $B(2+i)$, $C(3-2i)$

a) $S: M(Z) \to M'(Z')$
$Z' = aZ + b$ / $a, b \in \mathbb{C}$

$S: C \to C \Rightarrow Z_C = aZ_C + b$ (1)

$S: A \to B \Rightarrow Z_B = aZ_A + b$ (2)

(1) − (2) donne

$Z_C - Z_B = a(Z_C - Z_A)$

$\Rightarrow a = \frac{Z_C - Z_B}{Z_C - Z_A} = \frac{3 - 2i - 2 - i}{3 - 2i - 4}$

$= \frac{1-3i}{-1-2i} = \frac{(1-3i)(-1+2i)}{1+4}$

$= \frac{5+5i}{5} = 1 + i$

$b = Z_C - aZ_C = (1-a)Z_C$
$= (1 - 1 - i)(3 - 2i)$
$= -3i - 2$

Donc

$S: M(Z) \to M'(Z')$
$Z' = (1+i)Z - 2 - 3i$

b) la rapport: $K = |1+i| = \sqrt{2}$

l'angle $\theta = Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$

3) $\varphi(Z) = Z^2 (5-i)z + 8 - i$

a) $\varphi(Z) = (x+iy)^2 - (5-i)(x+iy) + 8 - i$

$= x^2 - y^2 + 2xyi - 5x - 5iy - xi + 8 -$

$\Rightarrow \varphi(Z) = x^2 - y^2 - 5x - y + 8 + i(2xy - xi$

$\Gamma = \{M \in P / \varphi(Z)$ est imaginaire pur non nul

$\Rightarrow Re(\varphi)(Z) = 0$

$\Rightarrow x^2 - y^2 - 5x\,y + 8 = 0$

$= (x - \frac{5}{2})^2 - (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{24}{4} + 8 = 0$

$\Rightarrow (x - \frac{5}{2})^2 - (y + \frac{1}{2})^2 = 2$

$\Rightarrow \frac{-(x - \frac{5}{2})}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(y + \frac{1}{2})^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$

Aicha Mohamed Lemane   N = 1744   classe : 7c1
école : Elmaarif   Baccalauréat : 2013   Session Normale

Suite de l'exercice 2 :

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega\left(\frac{5}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$; Γ a pour équation :

$$\frac{-X^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$$

D'où Γ est une hyperbole de centre Ω et de ·

b) ~~po~~ sommets :

$B(0, \sqrt{2})$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

et $B'(0, -\sqrt{2})$

Mais dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

on a $B\left(\frac{5}{2} ; \sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$ et $B'\left(\frac{5}{2} ; -\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$

Les asymptotes Δ et Δ' ont pour équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

$\Delta : Y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} X = X$

$\Delta' : Y = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} X = -X$

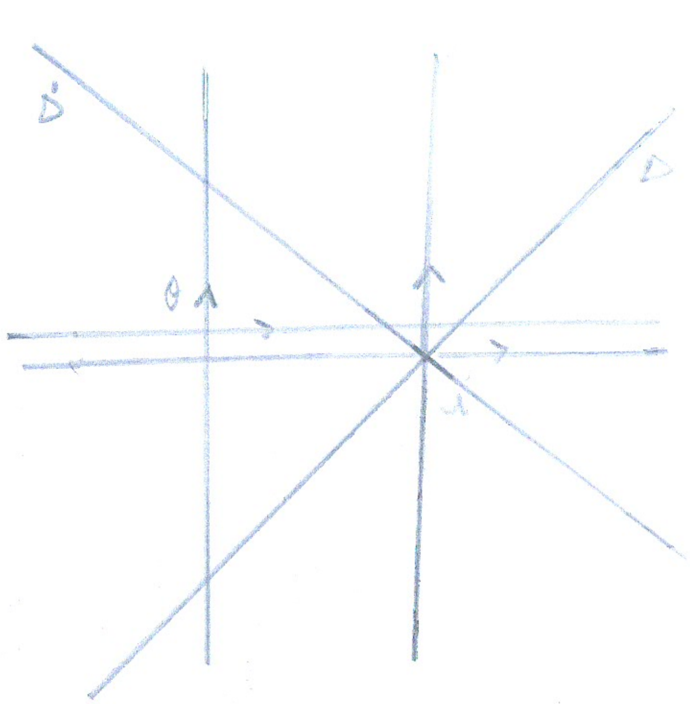
et Dans le repéré $(O, \vec{i}, \vec{j})$

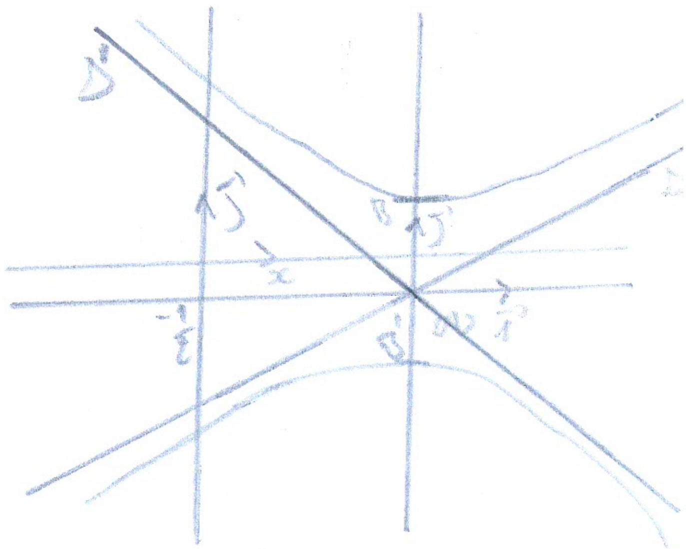
on a : $y + \frac{1}{2} = x - \frac{5}{2}$

$\Rightarrow \Delta : x = x - 3$

et $y + \frac{1}{2} = -x + \frac{5}{2}$

$\Rightarrow \Delta' : y = -x + 2$





Aicha Mohamed Lemane N= 1744 classe: 7c1
école: Elmaarif Baccalauréat: 2013 Session Normale

Exercice 3:

1. a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(3e^x - xe^x) = 0$

$\Rightarrow$ la droite (ox) : $y=0$ est une A.H de C_f en $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(3-x)e^x = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(3-x)e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}-1\right)e^x = -\infty$

$\Rightarrow C_f$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (oy)

b) $f'(x) = -1e^x + (3-x)e^x = (-1+3-x)e^x = (2-x)e^x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2-x=0 \Rightarrow x=2$

Tableau de varriation de f

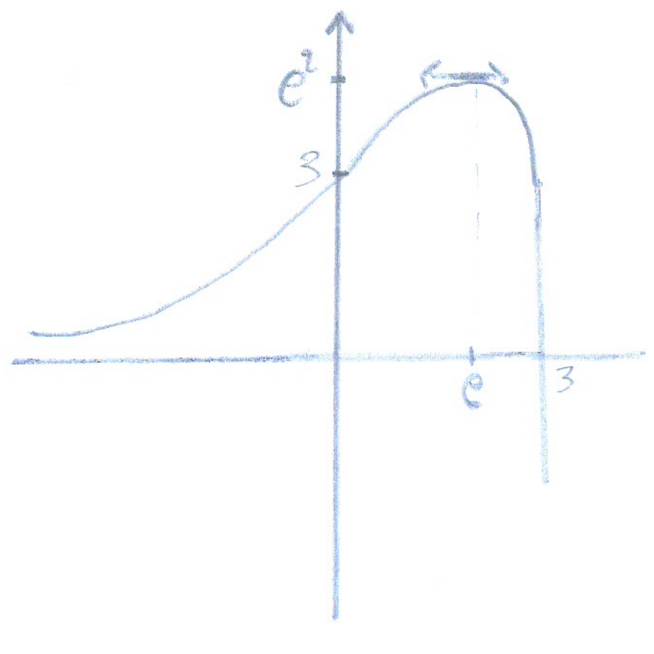
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$-\infty$

c) $C_f \cap (ox)$: $f(x)=0 \Rightarrow (3-x)e^x = 0$

$\Rightarrow 3-x=0 \Rightarrow x=3$

$C_f \cap (ox) = \{(3,0)\}$

$C_f \cap (oy) = \{(0,3)\}$



d) $f'(x) - f(x) = (2-x)e^x - (3-x)$

$= (2-x-3+x)e^x = -e$

$\Rightarrow f$ est solution de l'équation differentielle $y' - y = -e^x$

Calcul de l'aire A

$A = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 (f'(x) + e^x)$

$= [f(x) + e^x]_0^3 = (e^3 - 4)4$

2. a) $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{3^n}{n!}$

$= \frac{3 \times 3 \times n!}{(n+1)n!\,3^n} = \frac{3}{n+1}$

or $n \geq 3 \Rightarrow n+1 \geq 4$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4}$

b) On a $0 \leq \frac{U_{k+1}}{U_k} \leq \frac{3}{4}$ pour tout $k \geq 3$

$k=3$ on a $0 \leq \frac{U_4}{U_3} \leq \frac{3}{4}$

$k=4$ on a $0 \leq \frac{U_5}{U_4} \leq \frac{3}{4}$

$k=5$ on a $0 \leq \frac{U_6}{U_5} \leq \frac{3}{4}$

$\vdots$

$k=n-2$ on a $0 \leq \frac{U_{n-1}}{U_{n-2}} \leq \frac{3}{4}$

$k=n-1$ on a $0 \leq \frac{U_n}{U_{n-1}} \leq \frac{3}{4}$

En multipliant les membres entre eux et en simplifiant:

on aura:

Aicha Mohamed Lemane
école : Elmaarif

Suite de l'exercice 3 :

on aura :

$$0 \leq \frac{U_n}{U_3} \leq \underbrace{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{3}{4}}_{(n-4+1)\text{ fois}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{U_n}{U_3} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_n \leq U_3 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_n \leq \frac{9}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} = 0$ car $0 < \frac{3}{4} < 1$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ (T.G)

3) $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^3 (3-x)^n e^x \, dx$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!}$$

a) $I_1 = \frac{1}{1!}\int_0^3 (3-x)e^x \, dx$

$= \int_0^3 f(x)\,dx = A = e^3 - 4$

b) on a $0 \leq x \leq 3$

$\Rightarrow -3 \leq -x \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq 3-x \leq 3$

$\Rightarrow 0 \leq (3-x)^n \leq 3^n$

$\Rightarrow 0 \leq (3-x)^n \leq 3^n e^x$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^3 (3-x)^n e^x dx \leq \int_0^3 3^n e^x dx$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n!}\int_0^3 (3-x)^n e^x dx \leq \frac{3^n}{n!}\int_0^3 e^x dx$

$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq U_n \left[e^x\right]_0^3$

$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq (e^x - 1)\,U_n$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^3-1)U_n = (e^3-1)\times 0 = 0$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

c) $I_{n+1} = \left[\frac{1}{(n+1)!}\int_0^3 (3-x)^{n+1} e^x dx\right]$

$u(x) = (3-x)^{n+1} \Rightarrow u'(x) = -(n+1)(3$

$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left[e^x(3-x)^{n+1}\right]_0^3 -$

$\int_0^3 -(n+1)(3-x)^n e^x dx]$

$= \frac{1}{(n+1)!}\left[-3^{n+1} + (n+1)\int_0^3 (3-x)^n e^x dx\right]$

$= \frac{-3^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(n+1)}{(n+1)n!}\int_0^1 (3-x)^n e^x dx$

$\Rightarrow I_{n+1} = -U_{n+2} + I_n$

d) Demontrons par recurrence que $\forall x \geq 1$

$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + I_n$

* Vérifions pour $n = 1$

pour $n = 1$ on a

$\frac{3^0}{0!} + \frac{3!}{1!} + I_1 = 1 + 3 + e^3 - 4$

Vraie pour $n = 1$

on suppose que

$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \dots + \frac{3^n}{n!} + I_n$

on demontre que

$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} + I_n$

On a :

$\underbrace{1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{2^n}}_{(e^3 - I_n)} + \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} + U_{n+1} + I_n - 4$

$= e^3$

Aicha Mohamed Lemane
école : Elmaarif

N : 1744
Baccalauréat : 2013

classe : 7C1
Session Normale

Suite d'exercice 3

Conclusion

$\forall n \geq 1$ on a

$$e^3 = \underbrace{1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \cdots + \frac{3^n}{n!}}_{S_n}$$

on a

$$e^3 = S_n + I_n$$

$$\Rightarrow S_n = e^3 - I_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} e^3 - I_n$$

$$= e^3 - 0$$

$$= e^3$$

Aicha Mohamed Lemane — N: 1744 — classe: 7c1
école: Elmaarif — Baccalauréat: 2013 — Session Normal

Exercice 4:

$\begin{cases} g(x) = 1 + x^3 - 3x^3 \ln x & si\ x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

1.a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 + x^3 - 3(x^3 - \ln x)$

$= 1 + 0 - 3\times 0 = 1 = g(0)$

Donc g est continue en 0^+

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{1}{x^3} + 1 - 3\ln x\right)$

$= +\infty(0 + 1 - \infty) = -\infty$

b) $g'(x) = 3x^2 - \left(9x^2 \ln x + 3x^3 \times \frac{1}{x}\right)$

$= \cancel{3x^2} - 9x^2 \ln x - \cancel{3x^2}$

$= -9x^2 \ln x$

T.V de g

x	0		1		$+\infty$
$-9x^2$	0	$-$		$-$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

c) g est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ et change de signe donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha > 1$

Comme $g(1) = 2 > 0$
et $g(2) = 9 - 24 \ln 2 < 0$
alors $1 < \alpha < 2$

g est $\searrow$ sur $[1; +\infty[$
pour $1 < x < \alpha$ on a
$g(x) > g(\alpha) = 0$

pour $x > \alpha$ on a
$g(x) < g(\alpha) = 0$

D'où

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

2) $f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^3}$; $x > 0$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{1} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{1} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \times \left(\frac{x}{1 + x^3}\right)$

$= 0 \times 0 = 0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{1 + x^3} = \lim\limits_{+\infty} \frac{x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

b) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 + x^3) - 3x^2 \ln x}{(1 + x^3)^2}$

$= \frac{1 + x^3 - 3x^3 \ln x}{x(1 + x^3)^2} = \frac{g(x)}{x(1 + x^3)^2}$

T.V de f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3) $\forall x \geq 1$; $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

a) f est continue sur $[1; +\infty[$ donc elle admet une primitive H dérivable sur $[1; +\infty[$

Aicha Mohamed Lemane
école: Elmaarif

Suite de l'exercice 4:

$F(x) = H(x) - H(1)$

Donc F est dérivable et $F'(x) = H'(x) - 0$

$= f(x)$

pour tout $x > 1$, $f(x) > 0$

Donc F est croissante

T.V de F

x	1	$+\infty$
$F'(x)$	$+$	
$F(x)$	0 ↗	

b) pour $t \geq 1$ on a

$\cancel{1} t^3 \leq 1 + t^3 \leq (1+t)^3$

car $(1+t)^3 = 1 + 3t + 3t^2 + t^3 \geq t^3$

$\Rightarrow \frac{1}{(1+t)^3} \leqslant \frac{1}{1+t^3} \leqslant \frac{1}{t^3}$

$t > 1 \Rightarrow \ln t > 0$

donc $\frac{\ln t}{(1+t)^3} \leqslant \frac{\ln t}{1+t^3} \leqslant \frac{\ln t}{t^3}$

$\Rightarrow \frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leqslant \frac{\ln t}{t^3}$

c) $\int_1^x \frac{\ln t}{t^3} dt$

$u(t) = \ln t \Rightarrow v'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{t^3} \Rightarrow v(t) = \frac{-1}{2t^2}$

$\int_1^x \frac{\ln t}{t^3} dt = \left[\frac{-\ln t}{2t^2}\right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t} \times \frac{1}{2t^2} dt$

$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2t^2}\right]_1^x$

$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x^2} + 1\right)$

$= \frac{-\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)}$

$\frac{a(1+t)^2}{t(1+t)^2} + \frac{bt(t+1)}{t(1+t)} + \frac{ct}{t(1+t)}$

$= \frac{(a+b)t^2 + (2a+b+c)t + a}{t(t+1)^2}$

par identification des coefficients des deux numérateurs on a:

$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b + c = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$

4.a) on a $\frac{\ln t}{(1+t)^3} \leqslant f(t) \leqslant \frac{\ln t}{t^3}$

$\int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3} dt \leqslant \int_1^x f(t) dt \leqslant \int_1^x \frac{\ln t}{t^3}$

on pose $J = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3} dt$

Calculons J:

$u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{(1+t)^3} \Rightarrow v(t) = \frac{-1}{2(1+t)^2}$

$\Rightarrow J = \left[\frac{-\ln t}{2(1+t)^2}\right]_1^x + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t} \times \frac{1}{(1+t)^2} dt$

$= \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} dt$

$\frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\left[\ln t - \ln(t+1) + \frac{1}{t+1}\right]_1^x$

$= \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{t}{t+1}\right) + \frac{1}{t+1}\right)_1^x$

$= \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}\right)$

$- \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

Aicha Mohamed Lemane
école : Elmaarif

Suite de l'exercice 4 :

$$= \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{-\ln x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1-2\ln 2}{4}$$

Donc :

on remplaçant les integrales $\int_1^x \frac{\ln t}{t^3}dt$ et $S = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3}dt$

par leurs valeurs on a :

$$\frac{-\ln x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1-2\ln 2}{4} \leq$$

$$F(x) \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} - \frac{\ln x}{2x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{2(1+x)^2} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{2(1+x)^2}$$

$$= 0 \times 0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2(1+x)^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \ln 1 = 0$$

Donc

$$0 - 0 + 0 - \frac{1-2\ln 2}{4} \leq \ell \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{4}$$