GROUPE

- Toutou Ahmed mewloud
- Meymouna med m'badi
- Zeynebou Taleb
- Nessibe Abdellahi

Exercices 3 ①

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^4 - \frac{4}{x}$.

Démontrer que l'équation $f(x) = \sin x$ admet une solution dans l'intervalle $[1,2]$.

Solution Ex3

$f(x) = x^4 - \frac{4}{x}$

Montrons que l'équation $f(x) = \sin(x)$ admet une Solution sur $I = [1,2]$

$\Leftrightarrow$ Montrons que $f(x) - \sin(x) = 0$ admet une solution sur I

Soit $h(x) = f(x) - \sin x$

$h(x) = x^4 - \frac{4}{x} - \sin x$

h est continue sur $I = [1,2]$

$h(1) = 1^4 - \frac{4}{1} - \sin(1)$

h est continue sur $I = [1,2]$

$h(1) = 1^4 - 4 - \sin 1 = -3 - \sin 1 < 0$

$h(2) = 2^4 - \frac{4}{2} - \sin 2 = 14 - \sin 2 > 0$

Comme : $h(1) \times h(2) = 0 \Rightarrow 0 \in (h(I))$

(2)

D'après le théorème de (T.V.I) intermédiaires $\exists x_0 \in I$

$h(x_0) = 0 \cdot f(x_0) - \sin x_0 = 0$

$\Rightarrow f(x_0) = \sin x_0$

Donc $h(x)$ admet une Solution x_0

Ex 6

Exercice 6

Démontrer que l'équation $x + \tan x = 0$ admet trois solutions dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Solution Ex 6

on pose $f(x) = x + \tan x$

alors : $f(x) = x + \frac{\sin x}{\cos x}$

f est définie ssi $\cos x \neq 0$

- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]}$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$

$\boxed{k = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]}$

$k = -2 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$

Donc f est définie sur

$[-\pi, \pi] \setminus \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$

$= [-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$

f est continue et dérivable sur $[-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\lim_{-\pi} f(x) = -\pi + 0 = -\pi$

$\lim_{-\frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} = + \frac{\sin -\frac{\pi}{2}}{\cos -\frac{\pi}{2}} =$

$\lim_{-\frac{\pi}{2}^-} = -\frac{\pi}{2} + \frac{-1}{0^+}$

$\boxed{\lim_{-\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty}$

3

suite Ex6

$$\lim_{-\frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{-1}{0^+}$$

$$\lim_{-\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\pi} f(x) = \pi + 0 = \pi$$

$$f'(x) = 2 + \tan^2 x \geq 0$$

T.v de

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		+	‖	+	‖	+	
$f(x)$	$-\pi$ ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Donc sur chacun des trois intervales : $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$
f est continue strictement monotone.
alors admet chacun des ces trois intervales une solution unique donc en total admet 3 solution dans $[-\pi, \pi]$

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $I = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ par : $f(x) = \frac{1+\sin x}{\sin x}$

1) Démontrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Démontrer que: $\forall x \in I$; $f'(x) = $ [illegible]

3) Démontrer que f^{-1} est dérivable sur J et calculer sa dérivée.

solution : Ex12

$$f(x) = \frac{1+\sin x}{\sin x}$$

f est définie, continue et dérivable sur $[\frac{\pi}{2}, \pi[$

$$\lim_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$\lim_{\pi^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)(\sin(x)) - \cos x(1+\sin x)}{(\sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x \sin x - \cos x - \cos x \sin x}{(\sin x)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2} \geq 0 \text{ sur } I$$

x	$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		+	
	2	$\nearrow$	$+\infty$

comme f est continue est continue strictement monotone sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ elle réalise une bijection de $[\frac{\pi}{2}, \pi[$

2) Montrer que $\forall x \in I$

$$f'(x) = (f(x)-1)\sqrt{f(x)^2 - 2f(x)}$$

$$= \frac{1+\sin x}{\sin x} - 1\sqrt{\left(\frac{1+\sin x}{\sin x}\right)^2 - 2\left(\frac{1+\sin x}{\sin}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{1+\sin^2 x + 2\sin x - 2\sin x - 2\sin^2 x}{\sin x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sin x} \times \sqrt{\frac{1-\sin x^2}{\sin x^2}} = \frac{1}{\sin x} \times \sqrt{\frac{\cos x^2}{\sin x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sin x} \times -\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin x^2}$$

3)

3) comme f est dérivable et comme sa dérivée ne s'annulle pas sur l'intervalle ouvert $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ la fonction f^{-1} est donc dérivable sur $[2, +\infty[$

Calculer sa dérivé

$$(f^{-1})' = (f(f^{-1}(x)) = x$$

on re

$$f^{-1}(x) = (f(f^{-1}(x)) - 1)x \sqrt{(f(f^{-1}(x))^2 - 2(f(f^{-1}(x)))}$$

$$f^{-1} = (x-1)\sqrt{x^2 - 2x}$$

$$(f^{-1})' = \sqrt{x^2 - 2x} + (x-1) \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 2x}}$$

!

Ex15

Exercice 15 (Bac 2013 sc) Suite la la

Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^3 + 2(n+2)x + 1$.

Le paramètre n est un entier naturel.

Soit C_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1.a) Dresser le tableau de variation de la fonction $f_0(x) = x^3 + 4x + 1$.

b) Montrer que l'équation $f_0(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique U_0 et que $U_0 \in]-1,0[$.

c) Tracer C_0.

2.a) Montrer que toutes les courbes C_n passent par un point fixe A que l'on déterminera.

b) Etudier les positions relatives des courbes C_n et C_{n+1}.

3 .a) Prouver que pour tout entier naturel, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution U_n et que $U_n \in]-1,0[$

b) On considère la suite de terme général U_n.

Montrer que la suite (U_n) est croissante. En déduire qu'elle est convergente.

Solution Ex15

1) a) $f_0(x) = x^3 + 4x + 1$

$D_f = \mathbb{R}\ ]-\infty, +\infty[$

* $f_0'(x) = 3x^2 + 4 > 0$ donc

f_0 est Strictement croissante sur $\mathbb{R}$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} x^3 = -\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} = +\infty$

* T.V

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_0'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) $f_0 : \mathbb{R} \to$ réalise une bijection car elle est continue (polynôme) et croissante sur $\mathbb{R}$

$0 \in \mathbb{R}$ donc $\exists!\ u_0 \in \mathbb{R}$ telque $f_0(u_0) = 0$ mais

$f_0(-1) = -4 < 0 = f_0(u_0) < f_0(0) = 1$

donc $-1 < u_0 < 0$ car f_0 est croissante

C) Branches

comme on à $\lim\limits_{-\infty} \frac{f_0(x)}{x} = \lim\limits_{-\infty} x^2 = +\infty$

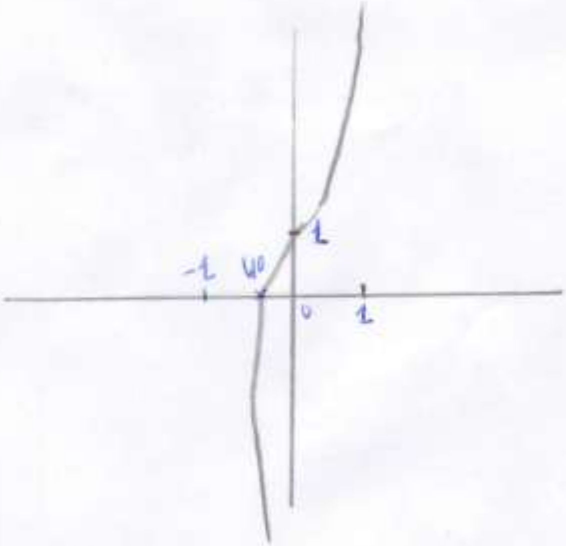
$\lim \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} x^2 = +\infty$

alors C_0 admet une BP de direction (oy) en $-\infty$ et $+\infty$

* $(C_0) \cap (ox) = \{u_0, 0\}$ car $f_0(u_0) = 0$

* $(C_0) \cap (oy) = \{0, 1\}$ car $f_0(0) = 1$

7



2) a) * on remarque que :
$f_n(0) = 1$ (independant de n)
alors $A(0,1) \in C_n \ \forall n \geq 0$

* 1 ! si $A(x,y) \in \cap C_n$
alors $\forall n \geq 0 \ A(x,y) \in C_n \cap C_{n+1}$
donc $y = f_n(x) = f_{n+1}(x)$
$\Rightarrow f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0$

$x^3 + 2(n+1+2)x + 1$
$- (x^3 + 2(n+2)x + 1) = 0$

$= \cancel{x^3} + 2(n+1+2)x + \cancel{1}$
$- \cancel{x^3} - 2(n+2)x - \cancel{1}$
$= 2x(\cancel{n} + 1 + \cancel{2} - \cancel{n} - \cancel{2}) = 0$
$= 2x = 0 \Rightarrow x = 0$
donc $y = f_n(0) = 1$
alors $A(0;1) =$

2) b) Position relative entre C_n et C_{n+1}
$f_{n+1}(x) - f_n(x) = 2x$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$	$-$	$+$
	$\frac{C_n}{C_{n+1}}$	$\frac{C_{n+1}}{C_n}$

3) a) $f_n'(x) = 3x^2 + 2(n+2) > 0$

donc f_n est strictement croissante
et continue (polynôme)
donc f_n = réalise une bijection
de $\mathbb{R}$ vers $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
$0 \in \mathbb{R}$ alors $\exists! \, u_n \in \mathbb{R}$ telque
$f_n(u_n) = 0$ mais
$f_n(-1) = -2(n+2) < 0 = f_n(u_n)$
donc $-1 < u_n$ car f_n est $\nearrow$
et $0 = f_n(u_n) < f_n(0) = 1$
donc $-1 < u_n < 0$

b) on a $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$
$\forall x \in]-\infty, 0[$
$u_n \in]-1, 0[$
donc $f_{n+1}(u_n) - \underbrace{f_n(u_n)}_{0} < 0$
alors $f_{n+1}(u_n) < 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$
donc $u_n < u_{n+1}$ car f_{n+1} est $\nearrow$

donc (u_n) est $\nearrow$ mais $u_n < 0$
donc (u_n) est $\nearrow$ majorée
alors (u_n) est convergente

15

Exercices primitives et intégrales :

Exercice 1

Sur un intervalle précisé, calculer une primitive des fonctions suivantes:

$f_1(x) = 5x^3 + \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} + 3$

$f_2(x) = 2\sqrt{x^3} + \frac{3}{x^5} + 4x - 1$

$f_3(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 7\sin 2x$

$f_4(x) = 5x^3(x^4+1)^{2015}$

$f_5(x) = \tan^{2013} x + \tan^{2015} x$

$f_6(x) = \frac{4x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}$

$f_7(x) = x^3(x^4+1)^{2015}$

$f_8(x) = \cos x\sqrt{1+\sin x}$

$f_9(x) = \frac{3\sin x}{\sqrt{3+2\cos x}}$

$f_{10}(x) = \frac{8x+8}{3\sqrt{x^2+2x+5}}$

Exercice 1:

∘ $f_1(x) = 5x^3 + \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} + 3$.

$\boxed{F_1(x) = \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}2\sqrt{x} + \frac{5}{x} + 3x + c}$

est une primitive de fonction f_1 sur $]0, +\infty[$.

∘ $f_2(x) = 2\sqrt{x^3} + \frac{3}{x^5} + 4x - 1$.

$f_2(x) = 2x^{3/2} + 3x^{-5} + 4x - 1$

$F_2(x) = \frac{2}{\frac{3}{2}+1} x^{3/2+1} + \frac{3}{-5+1}x^{-5+1} + 2x^2 - x + c$

$\boxed{F_2(x) = \frac{4}{5}x^{5/2} - \frac{3}{4}x^{-4} + 2x^2 - x + c}$.

est une primitive de f_2 sur $]0; +\infty[$

∘ $f_3(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 7\sin 2x$.

$F_3(x) = \tan x - 7\times\left(\frac{-1}{2}\cos 2x\right) + c$

$\boxed{F_3(x) = \tan x + \frac{7}{2}\cos 2x + c}$

est une primitive de f_3 sur $]-\frac{\pi}{2}+k\pi ; \frac{\pi}{2}+k\pi[$; $k \in \mathbb{Z}$

∘ $f_4(x) = 5x^3(x^4+1)^{2015}$

$f_4(x) = \frac{5}{4}(4x^3)(x^4+1)^{2016}$

f_4 est sous forme $\frac{5}{4}u'(x)(u(x))^n$ avec $u(x) = x^4+1$

et $n = 2015$ Donc : $F_4(x) = \frac{5}{4}\left(\frac{(x^4+1)^{2016}}{2016}\right) + c$

∴ $\boxed{F_4(x) = \frac{5}{4}\left(\frac{(x^4+1)^{2016}}{2016}\right) + c}$

est une primitive de f_4 sur $\mathbb{R}$.

⊙ $f_5(x) = \tan^{2015}x + \tan^{2013}x = \tan^{2013}(1+\tan^2 x)$

$\Rightarrow u'(x)(u(x))^n$ avec $u(x) = \tan x$ et $n = 2013$.

$\boxed{F_5(x) = \dfrac{\tan^{2014}x}{2014} + c}$ est une primitive de f_5 sur $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $k \in \mathbb{Z}$

⊙ $f_6(x) = \dfrac{4x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2} = \dfrac{3x^2+x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2} = \dfrac{3x^2+(x+1)^2}{x^2(x+1)^2} = \dfrac{3x^2}{x^2(x+1)^2} + \dfrac{(x+1)^2}{x^2(x+1)^2}$

$f_6(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow \therefore \boxed{F_6(x) = \dfrac{-3}{x+1} - \dfrac{1}{x} + c}$

est une primitive de f_6 sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0; +\infty[$

⊙ $f_7(x) = x^3(x^4+1)^{2015} = \frac{1}{4}(4x^3)(x^4+1)^{2015}$

$\boxed{F_7(x) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{(x^4+1)^{2016}}{2016}\right) + c}$ est une primitive de f_7 sur $\mathbb{R}$.

⊙ $f_8(x) = \cos x\sqrt{1+\sin x} = \cos x(1+\sin x)^{1/2}$

sous forme $u'(x).(u(x))^{1/2}$ on a $U(x) = 1+\sin x$

$\therefore F_8(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}(1+\sin x)^{\frac{1}{2}+1} + c$

$F_8(x) = \dfrac{2}{3}(1+\sin x)^{3/2} + c \Rightarrow \therefore \boxed{F_8(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{(1+\sin x)^3}}$

est une primitive de f_8 sur $\mathbb{R}$ (car $\forall x \in \mathbb{R}$ $1-\sin x \geq 0$)

⊙ $f_9(x) = \dfrac{3\sin x}{\sqrt{3+2\cos x}} = \dfrac{-3}{2} \times \dfrac{-2\sin x}{\sqrt{3+2\cos x}}$

sous forme $\dfrac{-3}{2}\left(\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\right)$ où $u(x) = 3+2\cos x$.

$\therefore F_9(x) = \dfrac{-3}{2} \times 2\sqrt{3+2\cos x}$

$\Rightarrow \boxed{F_9(x) = -3\sqrt{3+2\cos x} + c}$

est une primitive de f_9 sur $\mathbb{R}$ (car $3+2\cos x \geq 1 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

Exercice 3

Exercice 3

On pose, pour tout entier naturel n non nul: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$

1) Montrer que f admet une primitive sur IR et déterminer sa primitive F telle que F(0)= 1.

2) Ecrire F(x) sous la forme d'un quotient en déduire une expression simple de f(x).

Solution

1) Comme f est une fonction polynôme elle est admet donc des primitives sur IR

Donc $F(x) = x + x^2 + x^3 \ldots + x^n + C$ est une primitive de f sur IR $F(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1$

D'où $F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots + x^n$ est la primitive de f sur IR tellque $F(0) = 1$

2) $F(x)$ las somme de $(n+1)$ premier termes d'une S. G de raison $q = x$ est de premier terme 1 si $x \neq 1$ alors

$$F(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

D'où $\forall x \neq 1$ $f(x) = F'(x)$

$$F'(x) = \frac{(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$$

$$F'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} \text{ si } x \neq 1$$

$$f(1) = 1 + 2 + 3 \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ex 5

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par: $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{1+\tan^{2012}x}, & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ f(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue, positive, décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Montrer que pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a: $f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=1$.

3) Interpréter le résultat précédent graphiquement. En déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{\pi}{4}$.

Solution Ex5

1 $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1+\tan^{2012}} & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ f(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

- Montrons que f est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[\; \tan x \geq 0$

$\Rightarrow \tan x^{2012} \geq 0$

$\Rightarrow 1 + \tan x \quad > 0$

$\Rightarrow$

$\boxed{\text{Donc } \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[\; f(x) > 0}$ (1)

D autre poit $\boxed{f(\frac{\pi}{2}) = 0}$ (2)

Montrons que f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

* sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ $f(x) = \frac{1}{1+\tan x^{2012}}$

inverse d'une fonction continue et qui ne s'annule pas sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est contine sur } [0, \frac{\pi}{2}[}$ (3)

Montrons que f est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$ on a $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ et

$\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} =$

$\left(\frac{1}{1+\tan x^{2012}}\right) = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})} f(x) = f(\frac{\pi}{2})$

Suite Ex5

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est continue à gauche en } \frac{\pi}{2}} \quad (4)$$

De (3) et (4) on déduit

$$\boxed{f \text{ est continue sur } [0, \frac{\pi}{2}]}$$

- Montrons que f est $\searrow$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ $f(x) = \frac{1}{1 + \tan x^{2012}}$

inverse d'une fonction dérivable et qui s'annule pas sur $[0, \frac{\pi}{2}[$
donc f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{-2012(1+\tan^2 x)\tan x^{2011}}{(1+\tan x^{2012})^2} \leq 0$$

d'où f est decroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ est continue

a gauche en $\frac{\pi}{2}$ donc

$$\boxed{f \text{ est decroissante sur } [0, \frac{\pi}{2}[}$$

2) $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ $f(x) + f(\frac{\pi}{2} - x)$

$$= \frac{1}{1 + \tan^{2012} x} = \frac{1}{1 + (\tan(\frac{\pi}{2} - x))^{2012}}$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{2012}} + \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}\right)^{2012}}$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{2012}} + \frac{1}{1 + \frac{\cos x^{2012}}{\sin x^{2012}}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\cos x^{2012} + \sin x^{2012}}{\cos x^{2012}}} + \frac{1}{\frac{\sin x^{2012} + \cos x^{2012}}{\sin x^{2012}}}$$

$$= \frac{\cos x^{2012}}{\cos x^{2012} + \sin x^{2012}} + \frac{\sin x^{2012}}{\cos x^{2012} + \sin x^{2012}}$$

$$= \frac{\cos x^{2012} + \sin x^{2012}}{\cos x^{2012} + \sin x^{2012}} = 1$$

* Pour $x = 0$ on a

$$f(0) + f(\frac{\pi}{2} - 0) = 1 + f(\frac{\pi}{2}) = 1 + 0 = 1$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$ on a

$$f(\frac{\pi}{2}) + f(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) + f(0) = 0 + 1 = 1$$

$$\boxed{\text{D'où } \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] : f(x) + f(\frac{\pi}{2} - x) = 1}$$

3) $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

$$f(x) + f(2a - x) = 2b$$

On a $= \frac{\pi}{4}$ et $b = \frac{1}{2}$

Donc le point $I(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$ est un centre de symetrie de la courbe de f

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ est l'aire du domaine D

délimité par $\mathcal{C}_f$ $[OA]$ et $[OB]$ ou $A(\frac{\pi}{2}, 0)$ et $B(0, 1)$

et les symétrie S_I de centre $I(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par: $f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1 - t^2}\,dt$.

1) Montrer que f est une fonction affine.

2) Donner l'expression de f(x).

Solution Ex7

$f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\,dt \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$f'(x) = (\sin x)' \sqrt{1-\sin^2 x} - (\cos x)' \sqrt{1-\cos^2 x}$

$\cos x \sqrt{\cos^2 x} - (-\sin)\sqrt{\sin^2 x}$

$f'(x) = \cos x\,|\cos x| + \sin x\,|\sin x|$

$x \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos x \geq 0$ et $\sin x \geq 0$

$\Rightarrow f'(x) = \cos x^2 + \sin x^2$

$\Rightarrow \boxed{f'(x) = 1}$

donc $\boxed{f(x) = x + k}$, $k \in \mathbb{R}$

fonction affine

2) $f(\frac{\pi}{4}) = \int_{\cos\frac{\pi}{4}}^{\sin\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-t^2}\,dt$

$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt = 0$

$f(\frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} + k = 0$

$k = -\frac{\pi}{4}$ donc

$\boxed{f(x) = x - \frac{\pi}{4}}$

Exercice 11

Soit f la fonction d'une variable réelle x définie par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier les variations de f et représenter Γ. Montrer que Γ est un arc d'un cercle C à préciser.

2) Donner une interprétation géométrique de l'intégrale $I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$. Donner sa valeur sans calculs.

3) En posant $x=\cos t$, calculer I et comparer avec le résultat précédent.

13

Exercice 11:

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

1. $x \in D_f \Leftrightarrow 1-x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (1-x)(1+x) \geq 0$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

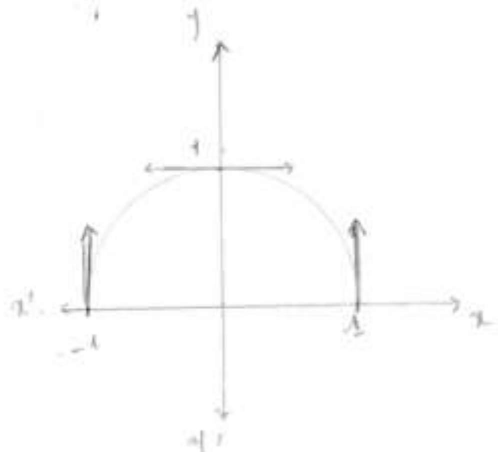
$D_f = [-1;1]$

$\forall x \in]-1,1[$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

le signe de f' est celui du $-x$

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{-1^+} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} \times \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \lim\limits_{-1^+} \dfrac{1-x^2}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{-1^+} \dfrac{(1-x)(\cancel{1+x})}{(\cancel{1+x})\sqrt{1-x^2}}$

$= \lim\limits_{-1^+} \dfrac{(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$.

$\mathcal{C}$ admet au point $A(-1,0)$ une demi-tangente verticale derigée vers le haut de m $\mathcal{C}$ admet une demi-tangente verticale au point $B(1,0)$.

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $y = \sqrt{1-x^2}$, $y \geq 0$

$y^2 = 1-x^2$; $\boxed{x^2+y^2=1}$; $y \geq 0$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ est une demi-cercle de centre O et de rayon 1.

2. $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

I est l'aire d'un quart du cercle $\mathcal{C}(O,1)$

$I = \dfrac{R^2\pi}{4} = \dfrac{1^2\times\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$.

$\Leftrightarrow \boxed{I = \dfrac{\pi}{4}}$

3. $x = \cos t$.

* $\begin{cases} x=0 \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow \boxed{t=\frac{\pi}{2}} \\ x=1 \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow \boxed{t=0} \end{cases}$

* $\boxed{dx = -\sin dt}$

* $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\sin^2 t}\,.\,\sin t\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 |\sin t|.\sin t\,dt$

$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sin^2(t)\,dt \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,dt$

Or:

$\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t)\,dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\boxed{I = \dfrac{\pi}{4}}$

Exercice 17

Soient a et b deux entiers naturels. On pose : $I(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\beta}dt$

1) Calculer $I(\alpha,0)$.

2) On suppose que $\beta \geq 1$. À l'aide d'un intégration par parties, démontrer que :

$$I(\alpha,\beta)=\frac{\beta}{\alpha+1}I(\alpha+1,\beta-1)$$

3) En déduire que : $I(\alpha,\beta)=\frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta)!}I(\alpha+\beta;0)$, puis que: $I(\alpha,\beta)=\frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}$.

Solution

Exercice 17 :

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta\,dt\ ,\ \alpha,\beta\in\mathbb{N}$$

① $I(\alpha,0)=\int_0^1 t^\alpha\,dt$

$$=\left[\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\right]_0^1$$

$$\boxed{I(\alpha,0)=\frac{1}{\alpha+1}}$$

② On a que $\beta\geq 1$
et en utilisant un I.P.P
On veut m.q.

$$I(\alpha,\beta)\overset{?}{=}\frac{\beta}{\alpha+1}I(\alpha+1;\beta-1)$$

On pose $\begin{cases}u'(t)=t^\alpha\\ v(t)=(1-t)^\beta\end{cases}$

Alors $\begin{cases}u(t)=\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\\ v'(t)=-\beta(1-t)^{\beta-1}\end{cases}$

$$\boxed{\int u'v=[uv]-\int uv'}$$

$$I(\alpha,\beta)=\left[\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}(1-t)^\beta\right]_0^1-\int_0^1\frac{-\beta}{1+\alpha}t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta}dt$$

$$I(\alpha,\beta)=0+\frac{\beta}{1+\alpha}\int_0^1 t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$$

$$\boxed{I(\alpha,\beta)=\frac{\beta}{1+\alpha}I(\alpha+1;\beta-1)}\ (1)$$

③ On ecrit (1) pour differentes valeurs :

$$I(\alpha,\beta)=\frac{\beta}{\alpha+1}I(\alpha+1,\beta-1)$$

$$I(\alpha+1;\beta-1)=\frac{\beta-1}{\alpha+2}I(\alpha+2;\beta-2)$$

$$I(\alpha+2;\beta-2)=\frac{\beta-2}{\alpha+3}I(\alpha+3,\beta-3)$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots$$

$$I(\alpha+\beta-1,1)=\frac{1}{\alpha+\beta}I(\alpha+\beta,0)$$

Par produit membre à membre :

$$I(\alpha,\beta)=\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)\times\cdots\times 1}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\times\cdots\times(\alpha+1)}I(\alpha+\beta,0)$$

$$I(\alpha,\beta)=\frac{\beta!\,\alpha!}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\times\cdots\times(\alpha+1)\alpha!}I(\alpha+\beta,0)$$

On remplace, d'apres ①.

$$I(\alpha+\beta,0)=\frac{1}{\alpha+\beta+1}$$

Donc $I(\alpha,\beta)=\frac{\alpha!\,\beta!}{(\alpha+\beta)!}\times\frac{1}{\alpha+\beta+1}$

$$I(\alpha,\beta)=\frac{\alpha!\,\beta!}{(\alpha+\beta+1)}$$