http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Nom : Teyah Mnt tolba
lalhe Mnt abd elKader.

Exercice 1:

$f(x) = \frac{(1+x)^{2015} - 1}{x}$

- $0 \in D_f$
- $\lim f(x) = \lim_0 \frac{(1+x)^{2015} - 1}{x}$

$= \frac{(0+1)^{2015} - 1}{0} = \frac{0}{0}$

Lever de l'intremination

Soit $u(x) = (1+x)^{2015} \Rightarrow \begin{cases} u(0) = 1 \\ u'(x) = 2015(1+x)^{2014} \\ u'(0) = 2015 \end{cases}$

$\lim_0 \frac{(1+x)^{2015} - 1}{x} = \lim_0 \frac{u(x) - u(0)}{x - 0}$

$u'(0) = 2015 \in \mathbb{R}$

Donc f admet un prolongement par continuite en 0:

ce prolongement est :

$\begin{cases} g(x) = f(x). \forall x \in D_f \\ g(0) = 2015 \end{cases}$

Exercice 4:

Soit $h(x) = f(x) - bx$

$h(a) = f(a) - ba < ab - ab < 0$

$h(b) = f(b) - bb < bb - bb^2 > 0$

$\Rightarrow h(a) \times h(b) < 0$

$\Rightarrow 0 \in h(I)$

D'après le TVI

$\exists c \in [a, b]\ h(c) = 0$

$f(c) - bc = 0$

$f(c) = bc$

Exercice 7:

$f(x) = x^2 - 2x + a$ et $g(x) = -x^2$

En un point d'absisse x_0. une equation de cotangenté à C_f est

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ st une equation de la tangente à C_g st:

$y = g'(x)(x - x_0) + g(x_0)$

on doit donc avoir

$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ \text{et} \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$

calculons $f'(x)$ et $g'(x)$

$f'(x) = 2x - 2$ et $g'(x) = -2x$

Don on doit avoir

$\begin{cases} x^2 - 2x + a = -x_0^2 \quad (1) \\ \text{et} \\ 2x_0 - 2 = -2x_0 \quad (2) \end{cases}$

De (2) on a $4x_0 = 2 \Rightarrow x_0 = 1/2$

et en remplaçant dans (1) on abtient :

$1/4 - 1 + a = -1/4 \Rightarrow a = 1 - 1/4 - 1/4$

$\Rightarrow a = 1 - 1/2 \Rightarrow \boxed{a = 1/2}$

Exercice 9 :

$f(x) = \frac{2x+1}{2x-4}$

1°) $x \in D_f \Rightarrow 2x-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

$D_f = \mathbb{R} / \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

$\forall x \in \mathbb{R} / \{2\}$

$f'(x) = \frac{2(2x-4) - 2(2x+1)}{(2x-4)^2}$

$\frac{4x - 8 - 4x - 2}{(2x-4)^2} = \frac{-10}{(2x-4)^2} < 0$

f st st ↘ sur $\mathbb{R} / [2]$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim \frac{2x}{2x} = 1$

$y = 1$ AH de $\mathcal{E}$ au vasinage de $+\infty$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty$

$x = 2$ AV (Asympts - vaticaP)

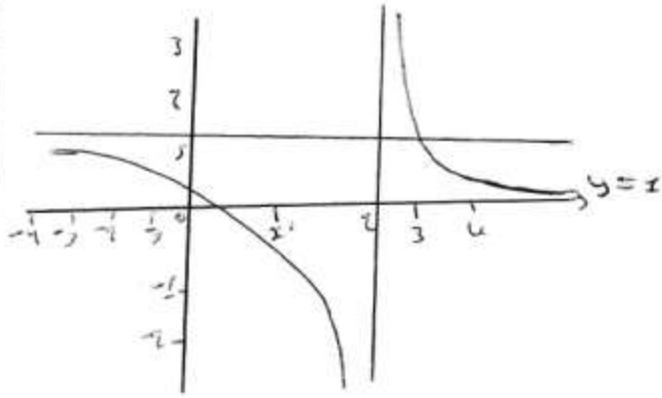
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1 ↘ $-\infty$		‖	$+\infty$ ↘ 1	

$\mathcal{E} \cap (oy) = f(0) = -1/4$

$(0, -1/4)$

$\mathcal{E} \cap (ox)$: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{2x+4} = 0$

$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1/2$



$I(2,1)$

$h(I, K)$, $K \in \mathbb{R}^+ / \{1\}$

$t_{\vec{u}}(\mathcal{E}_f) = \mathcal{E}_g$

$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\boxed{g(x+a) = f(x+b)}$

$h(I, K)(\mathcal{E}_f) = \mathcal{E}_g$

$Kf(x + (1-K)a =$

$Kf(x) + (1-k)b$

$Kf(x) + (1-k)b$

Methode 1 :

$h(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_K$

$\Rightarrow h^{-}(\mathcal{E}_K) - \mathcal{E}$

$f(\frac{1}{K} x + (1 - \frac{1}{K}$

2) $\frac{1}{K} g(x) + 1 - \frac{1}{K})\ell$

$g(x) = f_K(x)$

$f(\frac{x}{K} + (\frac{K-1}{K})(K-1)$

$f(x) = K \frac{(2\frac{x}{K} + 2(\frac{K-1}{K}) + 1}{2\frac{x}{K} + 2(\frac{K-1}{K}) - 4}$

Suite Exercice 9 :

$$f_K(x) = \frac{2x + 4(K-1) + 15}{\frac{2x}{K} + 4\frac{K-1}{K} - 4} = (K-1)$$

$$= \frac{2x + 5K - 4}{\frac{2x + 4K - 4 - 4K}{K}} - (K-1).$$

Exercice 2 :

1-) $ax + b + \frac{c}{(x+1)^2} = f(x). \forall x \in D_f$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2(ax+b)+c}{(x+1)^2} = f(x) \forall x \in D_f$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2+2x+1)(ax+b)+c}{(x+1)^2} = f(x) \forall x \in D_f$$

$$\Rightarrow \frac{ax^3 + bx^2 + 2ax^2 + 2bx + ax + b + c}{(x+1)^2} = f(x)$$

$\forall x \in D_f$

$$\frac{ax^2 + (b+2a)x^2 (2b+a)x + b + c}{(x-1)^2} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 3}{(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = 3 \\ 2b + a = 3 \\ b + c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 - 2 \times 1 = 1 \\ 2 \times 1 + 1 = 3 \\ c = -3 - 1 = 4 \end{cases} = \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -4 \end{cases}$$

$\forall x \in D_f \; f(x) = x + 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$

2.) $\forall x \in D_f$ - $f(x) = x - 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$

Donc $F(x) = \frac{1}{2} x^2 + x + \frac{4}{x+1} + C$

est une primitive de f sur $]-\infty ; -1[$ et $]-1, +\infty[$

Exercice 4 :

1°) on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$ soit

$$f'(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

L'integrale $I \int_0^1 \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$ peut être sous la forme :

$$I = \int_0^1 \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} (x + \sqrt{x^2+1}) dx$$

D'ou $I \left[\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+1})^2\right]_0^1$

$$I = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}(1)^2$$

Enfin $I = \frac{-1 + 2\sqrt{2}}{2}$

L'integrale $J = \int_0^1 \frac{1}{(x + \sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}$ dx peut être sous la forme :

Suite exercice 4

$J = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}\, dx$ d'où $J = \left[\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]_0^1$

$J = \frac{-1}{1+\sqrt{2}} + 1.$

Enfin $J = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

Exercice : 6

1.) $U_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\, dt$

Comme la fonction $t \to \frac{t^n}{1+t^2}$ est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ elle est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0,1]$

d'où : l'intégrale U_n existe et l'écriture $\int_0^1 \frac{t^n}{1+x^2}\, dt$ définit bien une suite numérique

2.) $U_n \int_0^1 \frac{t^n}{1+x^2}\, dt$ et U_{n+1}

$= \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2}\, dt$

On a : $0 \leq t \leq 1$

Et en multiplication par $\frac{t^n}{1+t^2}$ (qui est ≥ 0 sur $[0,1]$) on obtient $0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t^2}\, dt$

$\leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\, dt$

Donc $\forall x \in \mathbb{N}$ $0 \leq U_{n+1}$

D'où : U_n est $\searrow$ et positive

Et comme elle est $\searrow$ et minorée (par 0) elle est donc convergente

3.) $U_n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\, dt$

$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1+t^2 \leq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

Et en multipliant par t^n (qui est ≥ 0 sur $[0,1]$) on obtient

$\frac{1}{2} t^n \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$

Donc $\frac{1}{2} \int_0^1 t^n\, dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+x^2}\, dt \int_0^1 t^n\, dt$

D'où $\frac{1}{2}\left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^1 \leq U_n \leq \frac{1}{x+1} = 0$

Donc $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - 0\right) \leq U_n \leq \frac{1}{x+1} = 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{2(x+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

or : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2(x+1)} = 0$

et

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

D'où d'après T.G

$\lim_{x \to +\infty} U_n = 0$

Exercice 8 :

1-) $I + J = \int_0^{\pi/2} (x\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx$

$I + J = \int_0^{\pi/2} x(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx$

$I + J = \int_0^{\pi/2} x\,dx$

$I + J = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi/2}$

$I + J = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0^2\right)$

$\boxed{I + J = \frac{\pi^2}{8}}$

2-). on a $I - J = \int_0^{\pi/2} (x\sin^2 x - x\cos^2 x)\,dx$

$I - J = \int_0^{\pi/2} x(\sin^2 x - \cos^2 x)\,dx$

$I - J = \int_0^{\pi/2} (-x\cos 2x)\,dx$

on utilise une intégration par parties ;

on pose : $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

Comme $\int uv' = uv - \int u'v$

$I - J \left[-x \times \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$

$I - J = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sin 2x)\,dx$

$I - J = \left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi/2}$

$I - J = \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi/2}$

$I - J = -\frac{1}{4}\cos\pi + \frac{1}{4}\cos 0$

$\boxed{I - J = \frac{1}{2}}$

on résout le système : $\begin{cases} I + J = \frac{\pi^2}{8} \\ I - J = \frac{1}{2} \end{cases}$

Par addition : $2I = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\boxed{I = \frac{\pi^2 + 8}{16}}$

Par soustraction : $2J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{J = \frac{\pi^2 + 8}{16}}$

[illegible]