Seyid Ahmedou Med Elkory

ELMAARIF 7D4

Devoir Amimath 2-2016 (corrigé)

Exercice 1: (partie A)

1/- Le T.V montre que f n'est pas definie sur 1. donc $Df = \mathbb{R} / \{1\}$

$\Rightarrow \boxed{\text{Choix A}}$

2/- f est paire S.Si $f(x) = f(-x)$

f est impaire S.Si $f(-x) = -f(x)$

on a $f(3) = -2$ tandisque $f(-3) > -2$

alors f n'est pas paire

et $f(-1) \neq f(1)$ alors f n'est pas impaire

donc f est ni paire ni impaire

$\Rightarrow \boxed{\text{Choix C}}$

3/- on a: $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty \Rightarrow C$ admet une A.V d'équation $x = 1$

$\Rightarrow \boxed{\text{Choix B}}$

4/- on a que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2 \Rightarrow C$ admet une A.H d'équation $y = -2$

$\Rightarrow \boxed{\text{Choix A}}$

5/- l'équation de la tangente est

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ pour $x_0 \in Df$

comme $f'(3) = 0$ et $f(3) = -2$

$\Rightarrow$ une équation de la tangente à C au point $x_0 = 3$ est $y = -2$

$\Rightarrow \boxed{\text{Choix A}}$

6/- $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{-\infty} f(x) \times \lim_{-\infty} \frac{1}{x} = -2 \times 0 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\text{Choix C}}$

7/- l'équation $f(x) = 0$ admet 3 solution car f change le signe 3 fois dans $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{\text{Choix A}}$

8/ Si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow C$ admet une B.P de direction (ox) au voisinage de $(+\infty)$

$\Rightarrow \boxed{\text{Choix B}}$

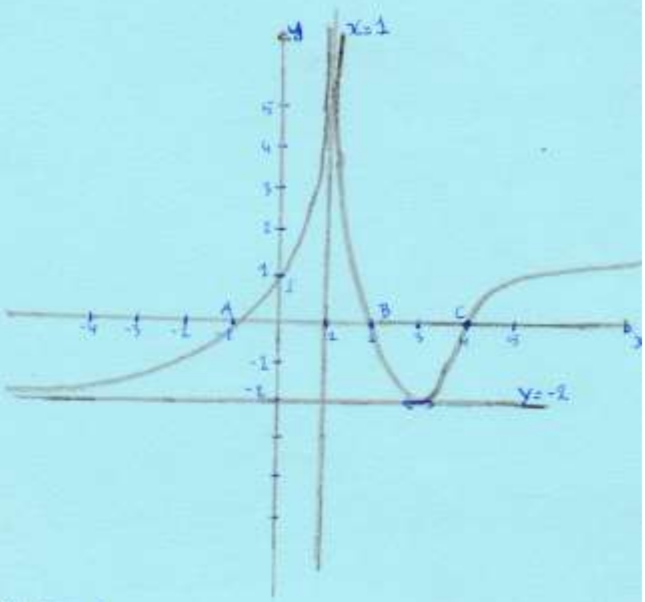
- Partie B

$- f(0) = 1 \Rightarrow C \cap (oy) = I(0,1)$

$- f(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 2$ ou $x = 4$

$\Rightarrow C \cap (ox) = A(-1,0)$ et $B(2,0)$ et $C(4,0)$

$- \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow C$ admet une B.P de direction (ox) au voisinage de $+\infty$



Exercice: 2

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{n+1}{2n} U_n + \frac{n-1}{2n} \end{cases}$$

1/- $U_2 = \frac{1+1}{2\times1} U_1 + \frac{1-1}{2\times1} = \frac{2}{2} U_1 = U_1 = \frac{1}{2}$

$\boxed{U_2 = \frac{1}{2}}$

$U_3 = \frac{2+1}{2\times2} U_2 + \frac{2-1}{2\times2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

$\boxed{U_3 = \frac{5}{8}}$

$U_4 = \frac{3+1}{2\times3} U_3 + \frac{3-1}{2\times3} = \frac{4}{6} \times \frac{5}{8} + \frac{2}{6} = \frac{20}{48} + \frac{1}{3} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$

$\boxed{U_4 = \frac{3}{4}}$

2/- $V_n = \frac{U_n - 1}{n}$ pour $n \geq 1$

a/- (V_n) est une S.G. S.Si $V_{n+1} = q V_n$

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)}\left(U_{n+1} - 1\right)$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{n+1}{2n}U_n + \frac{n-1}{2n} - 1\right)$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{n+1}{2n}U_n + \frac{n-1-2n}{2n}\right)$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{n+1}{2n}U_n - \frac{n+1}{2n}\right)$$

$$V_{n+1} = \frac{(n+1)}{2(n+1)}\left(\frac{1}{n}U_n - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{U_n - 1}{n}}_{V_n}\right)$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$$

$\Rightarrow (V_n)$ est une S.G de raison $q = \frac{1}{2}$

b/ $V_n = V_p \times (q)^{n-p} = V_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

or $V_1 = \frac{U_1 - 1}{1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{V_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

- $V_n = \frac{U_n - 1}{n} \Rightarrow U_n = nV_n + 1 = n \times \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\boxed{U_n = \frac{-1}{2}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1}$$

C/- comme $|q| < 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{n \to +\infty} V_n = 0}$

Exercice 3:

$Z_1 = \frac{3+i}{1+2i}$ $\quad Z_2 = \frac{3-i}{1-i}$ $\quad Z_3 = (1+i)^2$

1/- forme algebrique de Z_1, Z_2 et Z_3

$$Z_1 = \frac{3+i}{1+2i} = \frac{(3+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3-6i+i+2}{1^2+2^2} = \frac{5-5i}{5}$$

$$\boxed{Z_1 = 1-i}$$

$$Z_2 = \frac{3-i}{1-i} = \frac{(3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i-i+1}{1^2+1^2} = \frac{4+2i}{2}$$

$$\boxed{Z_2 = 2+i}$$

$$Z_3 = (1+i)^2 = 1+i+i-1$$

$$\boxed{Z_3 = 2i}$$

- forme trigonometrique de Z_1

$|Z_1| = \sqrt{Z_1 \cdot \overline{Z_1}} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{a}{|Z_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{b}{|Z_1|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \theta = \frac{-\pi}{4}$$

$Z_1 = |Z_1|(\cos\theta + i\sin\theta)$

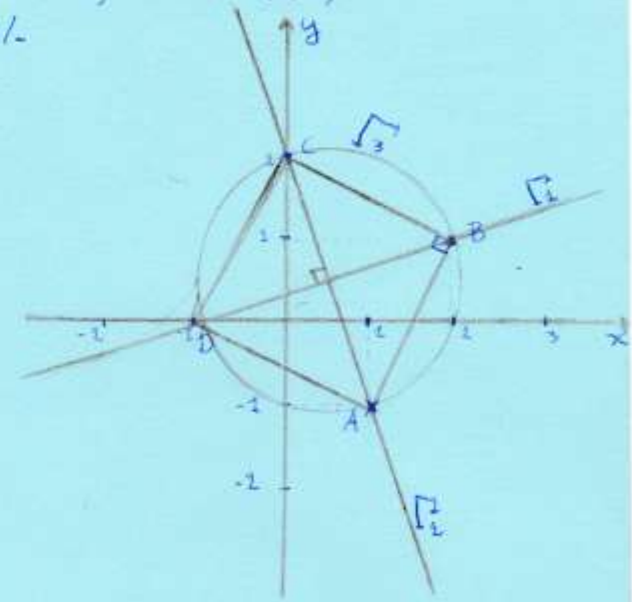
$Z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2/ $A \to Z_1 = 1-i \Rightarrow A(1,-1)$

$B \to Z_2 = 2+i \Rightarrow B(2,1)$

$C \to Z_3 = 2i \Rightarrow C(0,2)$

a/-



b/ nature du triangle ABC

d'après la figure on remarque que ABC est isocèle en B, pour verifier on montre que

$$Z = \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = \pm i$$

$$Z = \frac{1-i-2-i}{2i-2-i} = \frac{-1-2i}{-2+i} = \frac{i(-2+i)}{(-2+i)} = i$$

$$Z = i$$

$\Rightarrow$ ABC est rectangle isocèle en B

C/ calcul de Z_D

ABCD est un parallélogramme

$\Rightarrow Z_D + Z_B = Z_A + Z_C$

$\Rightarrow Z_D = Z_A + Z_C - Z_B = 1-i+2i-2-i = -1$

$$\boxed{Z_D = -1}$$

$\Rightarrow D(-1,0)$

Seyid Ahmedou Med Elkory

ELMAARIF 7 D_4

Devoir Amimath 2-2016 (suite)

Exercice 3: (Suite)

3/ $f(z)=\dfrac{(1+i)z-2}{z-2i}$

Montron que $f(z)=(1+i)\dfrac{z-1+i}{z-2i}$

on a $(1+i)\dfrac{z-1+i}{z-2i}=\dfrac{(1+i)z-1+i-i-1}{z-2i}$

$=\dfrac{(1+i)z-2}{z-2i}=f(z)$

$\Rightarrow \boxed{f(z)=(1+i)\dfrac{z-1+i}{z-2i}}$

4/ a. $\Gamma_1 : |f(z)|=\sqrt{2}$

$\Rightarrow \left|(1+i)\left(\dfrac{z-1+i}{z-2i}\right)\right|=\sqrt{2}$

on remarque que $f(z)=(1+i)\dfrac{z-z_A}{z-z_C}$

$\Rightarrow \left|(1+i)\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_C}\right)\right|=\sqrt{2}$

$|1+i|\left|\dfrac{z-z_A}{z-z_C}\right|=\sqrt{2}$

$\sqrt{2}\,\dfrac{|z-z_A|}{|z-z_C|}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow \dfrac{|z-z_A|}{|z-z_C|}=1 \Longleftrightarrow |z-z_A|=|z-z_C|$

$\Rightarrow \Gamma_1$: est la mediatrice de $[AC]$
construction (voire fig)

b/ $\Gamma_2 : \arg(f(z))=\dfrac{\pi}{4}[\pi]$

$\arg\left((1+i)\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_C}\right)\right)=\dfrac{\pi}{4}[\pi]$

$\arg(1+i)+\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_C}\right)=\dfrac{\pi}{4}[\pi]$

$\dfrac{\pi}{4}+\arg\dfrac{z-z_A}{z-z_C}=\dfrac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow \arg\dfrac{z-z_A}{z-z_C}=0\,[\pi]$

$\Rightarrow \Gamma_2$ est la droite (AC) privé de A et C
(construction voir fig)

c/ $\Gamma_3 : \arg(f(z))=-\dfrac{\pi}{4}[\pi]$

$\Rightarrow \arg(1+i)+\arg\dfrac{z-z_A}{z-z_C}=-\dfrac{\pi}{4}[\pi]$

$\Rightarrow \dfrac{\pi}{4}+\arg\dfrac{z-z_A}{z-z_C}=-\dfrac{\pi}{4}[\pi]$

$\Rightarrow \arg\dfrac{z-z_A}{z-z_C}=-\dfrac{\pi}{2}[\pi]$

$\Rightarrow \arg\dfrac{z-z_C}{z-z_A}=\dfrac{\pi}{2}[\pi]$

$\Rightarrow \Gamma_3$: est le cercle de diamétre $[AC]$
privé de A et C
(construction, voir fig)

Exercice 4: $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$

1/ f est definie ssi $x-2\neq 0$

$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}/\{2\}$

$\boxed{D_f=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[}$

$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}=\dfrac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}$

$f(x)=\dfrac{ax^2+bx-2ax-2b+c}{x-2}=\dfrac{ax^2+(b-2a)x+(c-2b)}{x-2}$

par identification

$\begin{cases}\boxed{a=1}\\ b-2a=-1\Rightarrow\boxed{b=1}\\ c-2b=-1\Rightarrow\boxed{c=1}\end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-2}}$

2/ $f'(x)=\dfrac{(x^2-x-1)'(x-2)-(x-2)'(x^2-x-1)}{(x-2)^2}$

$f'(x)=\dfrac{(2x-1)(x-2)-1(x^2-x-1)}{(x-2)^2}$

$f'(x)=\dfrac{2x^2-4x-x+2-x^2+x+1}{(x-2)^2}$

$\boxed{f'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}}$

3/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{+\infty} x=+\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}$ $x=2$ A.V

$\boxed{3}$

$f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0$

$\Delta=(-4)^2-4\times3\times1=16-12=4$ $\sqrt{\Delta}=2$

$x_1=\frac{4+2}{2}=3$ $x_2=\frac{4-2}{2}=1$

$f(3)=5$ $f(1)=1$

x	$-\infty$ 1 2	3 $+\infty$
$f'(x)$	+ 0 − ‖	− 0 +
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 1 ↘ $-\infty$ ‖	$+\infty$ ↘ 5 ↗ $+\infty$

4/- l'abscisse du point d'intersection de C avec (OY) est 0

- equation de la tangente en $x_0=0$

T: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=f'(0)(x-0)+f(0)$

or $f'(0)=\frac{3}{4}$ et $f(0)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{T:\ y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}}$

5/- l'équation $f(x)=0$ admet 2 solutions dans $\mathbb{R}$ car f change le signe 2 fois (dans les intervalles $]-\infty,1]$ et $[1,2[$)

$f(x)=0 \Rightarrow x=\alpha$ ou $x=\beta$

valeur approche de α

$f(0)=\frac{1}{2}$

$f(-1)=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow -1<\alpha<0$ car $f(-1)\times f(0)\leq 0$

$f(-0,5)=0,1$

$f(-0,6)=-0,01$

$\Rightarrow -0,6<\alpha<-0,5$

$\Rightarrow \boxed{\alpha\approx-0,55}$

- valeur approche de β

on a $\beta\in[1,2]$

$f(1,5)=0,5$

$f(1,6)=0,1$

$f(1,7)=-0,63$

$\Rightarrow 1,6<\beta<1,7$ car $f(1,6)\cdot f(1,7)\leq 0$

$\Rightarrow \boxed{\beta\approx1,65}$

6/- a- on a $x=2$ A.V

et comme $f(x)=x+1+\frac{1}{x-2}$

et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-2}=0 \Rightarrow$ C admet un A.O d'équation

$\boxed{D:\ y=x+1}$

b- $d(x)=f(x)-y=\frac{1}{x-2}$

x	$-\infty$ 2	$+\infty$
1	+	+
$x-2$	− 0	+
$d(x)$	− ‖	+
P.R	D/C	C/D

7/- Montron que $f(4-x)+f(x)=6$

on a $f(4-x)=(4-x)+1+\frac{1}{4-x-2}=5-x+\frac{1}{2-x}$

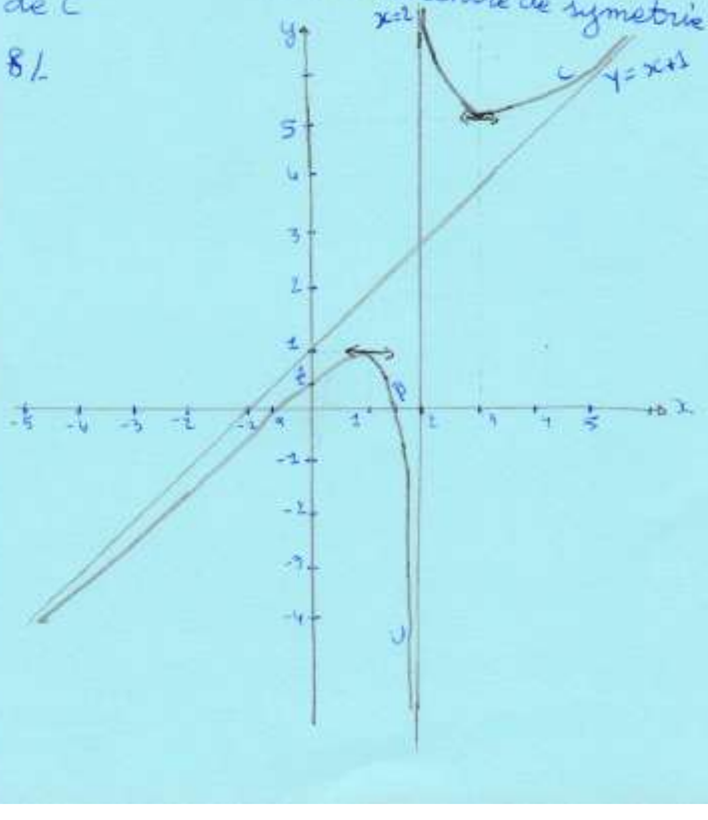
$\Rightarrow f(4-x)=5-x-\frac{1}{x-2}$

$f(4-x)+f(x)=5-\cancel{x}-\cancel{\frac{1}{x-2}}+\cancel{x}+1+\cancel{\frac{1}{x-2}}$

$f(4-x)+f(x)=6$

$\Rightarrow$ le point $I(2,3)$ est un centre de symetrie de C

8/-



Seyid Ahmedou Med Elkory
ELMAARIF 7D4

Devoir Amimath 2-2016 (suite)

Exercice 4 : (suite)

9/ $x^2-(1+m)x-1+2m=0$

$x^2-x-mx-1+2m=0$

$x^2-x-1=mx-2m$

$x^2-x-1=m(x-2)$

$\Rightarrow m=\frac{x^2-x-1}{x-2}=f(x)$

$\Rightarrow f(x)=m$ admet dans $]-\infty,1[\cup]5,+\infty[$ 2 solutions

et dans $]1,5[$ aucune solutions

et en $y=1$ et $y=5$, une seule solution

10/- a- comme g continue strictement croissante $\Rightarrow$ g réalise une bijection de $I=]-\infty,1]$ sur $J=]-\infty,1]$

b- on a $g(0)=\frac{1}{2}\Rightarrow g^{-1}(\frac{1}{2})=0$ et $g'(0)=\frac{3}{4}$

$$(g^{-1})'(\tfrac{1}{2})=\frac{1}{g'(g^{-1}(\frac{1}{2}))}=\frac{1}{g'(0)}=\frac{1}{3/4}=\frac{4}{3}$$

$$\boxed{(g^{-1})'(\tfrac{1}{2})=\frac{4}{3}}$$

c-