Salma Kerbally
16-01-2017 7C
El maarif

Courbes et Transformations

Methode :

$\mathcal{C}$ une courbe, φ une transformation $\varphi'(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ pour trouver l'equation de $\mathcal{C}'$ à partir de celle de $\mathcal{C}$.

1. On écrit l'expression analytique de $\mathcal{C}$ (x', y' en fonction de x et y).
2. On ecrit (x, y en fonction de x' et y')
3. On remplace dans l'égalité $y = f(x)$
4. On obtient une relation (x', y' qui caracterise $\mathcal{C}'$)

Exercice 1

Soit $f(x) = x^2$, $\mathcal{C}$ la courbe de f dans un R.O.N.

On considère la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$.

1) Trouver l'équation de la courbe $\mathcal{C}' = t_{\vec{u}}(\mathcal{C})$

2) Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ dans le même repère.

Solution 1

Soit $M(x, y)$; $M'(x', y')$

$t(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x'-x = 2\\y'-y = -5\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}x' = x+2\\y' = y-5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = x'-2\\y = y'+5\end{cases}$

$M(x,y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow y = f(x)$

$\Leftrightarrow y'+5 = f(x'-2)$

$\Rightarrow y' = (x'-2)^2 - 5$

$\Rightarrow y' = x'^2 - 4x' - 1$

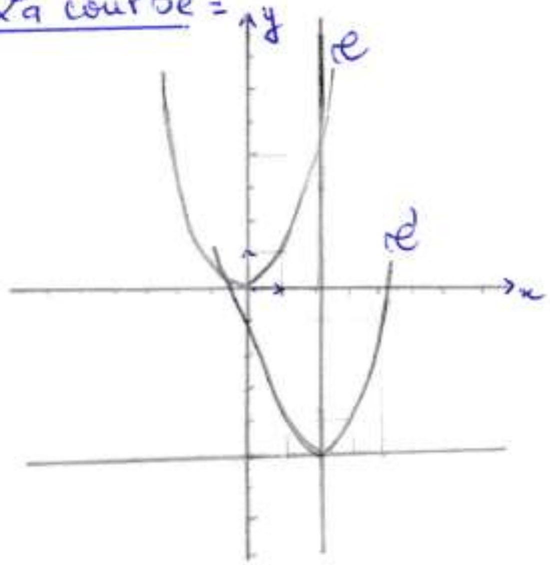
D'où l'equation de $\mathcal{C}'$

$y = x^2 - 4x - 1$

C'est la courbe de la fonction

$g(x) = x^2 - 4x - 1$

2) La courbe :



Exercice 2

Reprendre les questions de l'exo 1 avec $f(x) = \frac{1}{x}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$.

Solution 2

Si $M(x,y)$; $M'(x',y')$ =

$t(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x=-3 \\ y'-y=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x'=x-3 \\ y'=y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x'+3 \\ y=y'-1 \end{cases}$

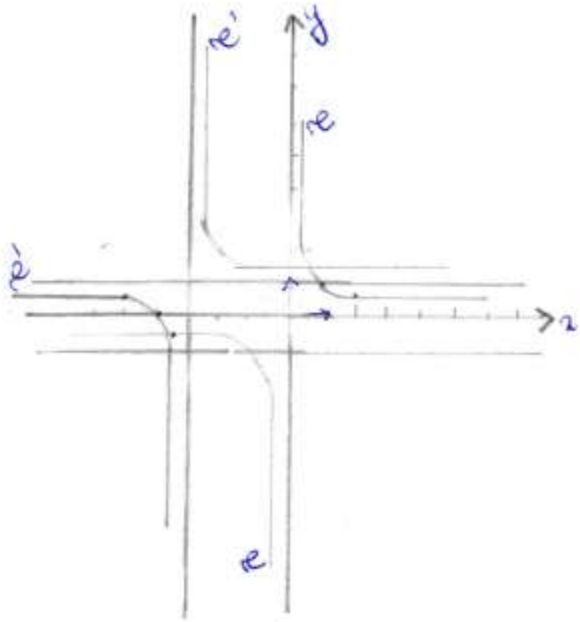
$M(x,y)\in \mathcal{C} \Leftrightarrow y=f(x)$

$\Rightarrow y=\frac{1}{x} \Rightarrow y'-1=\frac{1}{x'+3}$

$\Rightarrow y'=1+\frac{1}{x'+3} \Rightarrow y'=\frac{x'+4}{x+3}$

D'où l'equation de $\mathcal{C}'$:

$y=\frac{x+4}{x+3}$



Exercice 3

Même questions avec $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ et h l'homothetie de centre $\Omega(3,2)$ et de rapport $k=2$

Solution 3

Soit $M(x,y)$; $M'(x',y')$

$h(M)=M' \Rightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=k\,\overrightarrow{\Omega M}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x'-3 \\ y'-2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x'-3=2(x-3) \\ y-2=2(y-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=2(x-3)+3 \\ y=2(y-2)+2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}(x'+3) \\ y=\frac{1}{2}(y'+2) \end{cases}$

$M(x,y)\in \mathcal{C} \Leftrightarrow y=f(x) \Leftrightarrow y=\frac{2x+1}{x-3}$

$\Rightarrow$

$\frac{1}{2}(y'+2)=\frac{2\cdot\frac{1}{2}(x'+3)+1}{\frac{1}{2}(x'+3)-3}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(y'+2)=\frac{x'+4}{x'+\frac{3-6}{2}} \Rightarrow y'+2=\frac{2x'+8}{\frac{x'-3}{2}}$

$\Rightarrow y'+2=\frac{4x'+16}{x'-3} \Rightarrow y'=\frac{4x'+16-2(x'-3)}{x'-3}$

$\Rightarrow y'=\frac{4x'+16-2x'+6}{x'-3}=\frac{2x'+22}{x'-3}$

C'est la courbe de fonction

$g(x)=\frac{2x+22}{x+(-3)}$

Rappel = (fonction homographe)

$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0 \,;\, a,b,c \text{ et } D\in\mathbb{R})$

- $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$
- $AV : x=-\frac{d}{c}$
- $AH : y=\frac{a}{c}$
- Centre de symetrie $\Omega(-\frac{d}{c} ; \frac{a}{c})$
- $f'(x)=\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$
- Strictement monotone.

(Suite) Solution 3

$f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

A.V : $x = 3$; A.H : $y = 2$

$\Omega(3,2)$; $f'(x) = \dfrac{-7}{(x-3)^2} < 0$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 2$

La courbe :

Exercice 4

Soit $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 + 4x - 2$

1) Montrez que $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par une translation que l'on determinera.

2) Tracer $\mathcal{C}_f$. En deduire $\mathcal{C}_g$.

Solution 4

1) On a $g(x) = x^2 + 4x - 2 = x^2 + 4x - 2 + 4 - 4$
$= (x+2)^2 - 2 - 4 = (x+2)^2 - 6$

$\Rightarrow g(x) = f(x+2) - 6$

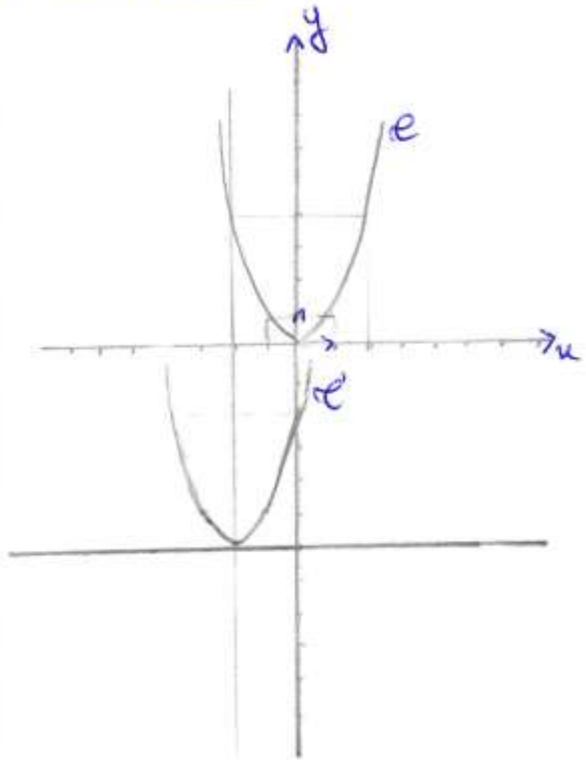
$\Rightarrow g(x) + 6 = f(x+2)$.

Relation du type $g(x) + q = f(x+p)$

$\mathcal{C}_g = t_{\vec{v}}(\mathcal{C}_f)$ avec $\vec{v}\begin{pmatrix}-p\\-q\end{pmatrix}$

D'où $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$

2) La courbe :



Exercice 5

Soit $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-4}$; $g(x) = \dfrac{3x+7}{x-4}$

Montrer que $\mathcal{C}_g = h(\mathcal{C}_f)$ où h est une homothétie que l'on caractérisera.

Solution 5

On remarque que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont le même centre de symétrie $\Omega(4,3)$. Alors $\Omega(4,3)$ est invariant par h

$h(\Omega) = \Omega$. Donc $\Omega(4,3)$ est le centre de h, cherchons le rapport k

(Suite) Solution 5

de h : $h(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

$\Rightarrow \begin{cases} x'-4 = k(x-4) \\ y'-3 = k(y-3) \end{cases} \Rightarrow x' = k(x-4)+4$

On sait que $y = f(x)$ car $M(x,y) \in \mathscr{C}_f$; $y' = g(x')$ car $M'(x',y') \in \mathscr{C}_g$.

On a : $k = \dfrac{y'-3}{y-3} = \dfrac{g(x)-3}{f(x)-3}$

$\Rightarrow k = \dfrac{\frac{3x'+7}{x'-4}-3}{\frac{3x+1}{x-4}-3} = \dfrac{\frac{3x'+7-3x'+12}{x'-4}}{\frac{3x+1-3x+12}{x-4}}$

$\Rightarrow k = \dfrac{\frac{19}{x'-4}}{\frac{13}{x-4}} = \dfrac{19(x-4)}{13k(x-4)} = \dfrac{19}{13k}$

$\Rightarrow k^2 = \dfrac{19}{13} \Rightarrow k = \pm\sqrt{\dfrac{19}{13}}$

Donc il existe deux homotheties $h_1\left(\Omega, \sqrt{\frac{19}{13}}\right)$; $h_2\left(\Omega ; -\sqrt{\frac{19}{13}}\right)$ transformant $\mathscr{C}_f$ en $\mathscr{C}_g$.

Autre Methode :

On transforme l'equation $\mathscr{C}_f$ par $h(\Omega, k)$ pour obtenir l'equation $\mathscr{C}_g$ puis on identifie avec l'équation donnée de $\mathscr{C}_g$: $y = \dfrac{3x+7}{x-4}$

Pour determiner k. On a $\begin{cases} x'-4 = k(x-4) \\ y'-3 = k(y-3) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'-4}{k}+4 \\ y = \dfrac{y'-3}{k}+3 \end{cases}$.

$y = f(x) \Rightarrow y = \dfrac{3x+1}{x-4} \Rightarrow$

$\dfrac{y'-3}{k}+3 = \dfrac{3\left(\left(\frac{x'-4}{k}\right)+4\right)+1}{\frac{x'-4}{k}+4-4}$

$\Rightarrow \dfrac{y'-3}{k} = \dfrac{3x'-12+12k+k}{x'-4} - 3$

$\Rightarrow \dfrac{y'-3}{k} = \dfrac{13k}{x'-4} \Rightarrow y'-3 = \dfrac{13k^2}{x'-4}$

$\Rightarrow y' = \dfrac{13k^2}{x'-4}+3 = \dfrac{3x'-12+13k^2}{x'-4}$

On identifie avec $g(x')$

$\Rightarrow \dfrac{3x'+7}{x'-4} = \dfrac{3x'-12+13k^2}{x'-4} \Rightarrow 7 = -12+13k^2$

$\Rightarrow 13k^2 = 19 \Rightarrow k^2 = \dfrac{19}{13}$

$\Rightarrow k = \pm\sqrt{\dfrac{19}{13}}$

Exercice 6

Soit $\mathscr{C}_m$ la courbe de $f_m(x) = x + \dfrac{m}{2x^2}$ m un parametre reel $(m \neq 0)$.

Montrer que $\mathscr{C}_m = h(\mathscr{C})$ où h est l'homothetie de centre O dont on determinera le rapport.

Solution 6

$h(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'}{k} \\ y = \dfrac{y'}{k} \end{cases}$

$y = f_1(x) \Rightarrow y = x + \dfrac{1}{2x^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{k}y' = \dfrac{1}{k}x' + \dfrac{1}{2\left(\frac{x'}{k}\right)^2}$

$\Rightarrow y' = x' + \dfrac{k}{2x'^2/k^2} \Rightarrow y' = x' + \dfrac{k^3}{2x^2}$

On identifie avec l'equation $\mathscr{C}_m$:

$y = x + \dfrac{m}{2x^2} \Rightarrow m = k^3 \Rightarrow k = \sqrt[3]{m}$