1445 Ramdhane / Saleck 7.C

ECOLE & ERRAJA

Exercice n°10 En utilisant le changement de variable calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{(4x+5)^5}$: $t = 4x+5$ $\qquad I_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$: $x = \tan t$

$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4dx}{1+\cos x}$: $t = \tan\frac{x}{2}$ $\qquad I_5 = \int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x+2}dx$: $t = \sqrt{1+x}$ puis $t = \tan u$

Solution:

$I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{(4x+5)^5}$ $\quad t = 4x+5$

$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 9 \\ x = 2 \Rightarrow t = 13 \end{cases}$

$dt = 4dx \Rightarrow dx = \frac{1}{4}dt$

$I_1 = \int_9^{13} \frac{1}{4}\cdot\frac{dt}{t^5}$

$= \frac{1}{4}\left[\ t\ \right]_9^{13}$

$I_1 = \frac{-1}{16}\left(13^{-4} - 9^{-4}\right)$

$I_2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ $\quad x = \tan t$

$x = \tan t.\ t \in \left[0.\frac{\pi}{2}\right]$

$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow \tan t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan t = \sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

$dx = (t + \tan^2 t)\ dt$

$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2 t)\ dt}{1+\tan^2 t}$ $\quad I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt$

$I_2 = \left[\ t\ \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$ $\quad I_2\ \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ $\quad I_2 = \frac{\pi}{12}$

$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4dx}{1+\cos x}$ $\quad t = \tan\frac{x}{2}$

$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \tan 0 = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \end{cases}$

$dt = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}dx$

$dx = 2\cos^2\frac{x}{2}\ .dt$

$I_3 \int_0^1 \frac{4.2\cos\frac{x}{2}}{1+\cos x}dt$ on soit que

$1 + \cos x = 2\cos\frac{x}{2}$

Alors $I_3 = \int_0^1 \frac{4.2\cos\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}dt$

$I_3 = \int_0^1 4dt$

$I_3 = \left[4t\right]_0^1$ $\quad I_3 = 4$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

$$I_5 = \int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x+2}\,dx$$

$$t = \sqrt{x+1}$$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow t = 1 \\ x=2 \Rightarrow t = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx \Rightarrow dt = \frac{1}{2t}\,dx$$

$$dx = 2t\,dt$$

on constate que

$$x^2+3x+2 = (x-1)(x+2)$$

$$= t^2(t^2-1)$$

$$I_5 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t \times 2t}{t^2(t^2-1)}\,dt$$

$$I_5 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{t^2+1}$$

$$t = \tan u$$

$$\begin{cases} t=1 \Rightarrow \tan u = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4} \\ t=\sqrt{3} \Rightarrow \tan u = \sqrt{3} \Rightarrow u = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$dt = (1+\tan^2 u)\,du$$

$$I_5 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2(1+\tan^2 u)}{\tan^2 u+1}\,dx$$

$$I_5 = \Big[2du = 2u \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I_5 = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$I_5 = \frac{\pi}{6}$$

1445 Ramdhame / Saleck A.C

Exercice 4 soit la fonction f definie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$$

on pose : $I = \int_0^1 \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$; $J = \int_0^1 \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Calculer $f'(x)$: en deduire I et J.

Solution

on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \quad \text{soit}$$

$$f'(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

l'integrale $I = \int_0^1 \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}}$ dx peut etre sous la forme

$$I = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{x^2+1})\,dx$$

D'ou $I = \left[\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+1})^2\right]_0^1$

$$I = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}(2)^2$$

Enfin $I = \frac{-1+2\sqrt{2}}{2}$

l'integrale $J = \int_0^1 \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}\,dx$

peut etre sous la forme

$$J = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}\,dx$$

d'ou $J = \left[\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]_0^1$

$$J = \frac{-1}{1+\sqrt{2}} + 1$$

Enfin $J = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

7.C {Ramdhane/saleck} {1445}

{ECOLE ERRAJA}

Exercice 1

Sur un intervalle precise. calculer une primitive de fonctions suivantes :

$f_5(x) = \tan^{2013} x + \tan^{2015} x$ $\qquad f_6(x) = \dfrac{4x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}$

$f_7(x) = x^3(x^4+1)^{2015}$ $\qquad f_8(x) = \cos x\sqrt{1+\sin x}$

$f_9(x) = \dfrac{3\sin x}{\sqrt{3+2\cos x}}$ $\qquad f_{10}(x) = \dfrac{8x+8}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

Solution

$f_5(x) = \tan^{2013} x + \tan^{2015} x$

$= \tan x^{2013}(1+\tan x^2)$

$= u'(x)\cdot(u(x))^n$

on $u(x) = \tan x$ et $n = 2013$

$F_5 = (x)\ \dfrac{\tan x^{2014}}{2014} + c$

est une primitive de f sur

$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi . \frac{\pi}{2}+k\pi\right[\in Z$

$f_6(x)\ \dfrac{4x^2-2x+1}{x^2(x+1)^2} = \dfrac{3x^2+x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}$

$= \dfrac{3x^2+x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}$

$= \dfrac{3x^2+(x+1)^2}{x^2(x+1)^2}$

$= \dfrac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(x+1)^2} + \dfrac{(x+1)^2}{x^2(x+1)^2}$

$= \dfrac{3}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x^2}$

est un primitive de f_6 sur chaque des intervalle

$]-\infty . -1[\ \vee\ ]-1 . -\infty[$ et $]0 . +\infty[$

$f_7(x)\ x^3(x^4+1)^{2015}$

$= \frac{1}{4}(4x^3)(x^4+1)^{2015}$

$= \frac{1}{4}\, u'(x)\cdot u(x)^n$

on $u(x) = \left(\dfrac{x^4+1}{2016}^{2016}\right) + c$

est une primitive de f_7 sur $\mathbb{R}$

$f_8(x) = \cos x\sqrt{3+2\cos x}$

$= \cos x\,\dfrac{(1+\sin x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$

$= (1+\sin x)^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{3}\sqrt{(1+\sin x)} + c$

est une primitive de f_8 sur $\mathbb{R}$

(car $1+\sin x \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$f_9(x) = \frac{3\sin x}{\sqrt{3+2\cos x}} =$

$\frac{3}{2} \times \frac{-2\sin x}{\sqrt{3+2\cos x}}$

$= \frac{3}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ ou

$u(x)$ $x^2+3x+2\cos x$

$F_9(x)$ $\frac{-3}{2} \times 2\sqrt{3+2\cos x+c}$

$= 3\sqrt{3+2\cos x+c}$

est une primitive de f_9 sur $\mathbb{R}$

(car $3+2\cos x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$f_{10}(x) = \frac{8x+8}{3\sqrt{x^2+2x+5}}$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}\right.$

$\frac{4}{3}\left(\frac{u(x)}{\sqrt{u(x)}}\right.$ ou

$u(x)$ x^2+2x+5

$F_{10}(x) = \frac{4}{3} \times 2\sqrt{x^2+2x+5} + c$

$= \frac{8}{3}\sqrt{x^2+2x+5} + c$

est une primitive de f_{10} sur $\mathbb{R}$

1445 Ramdhane / Saleck 7. C

École ERRAJA

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\left[0 . \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

1) Montrer que f est une fonction affine.

2) Donner l'expression de $f(x)$.

Solution f est définie sur $\left[0 . \frac{\pi}{2}\right]$

par $f(x) \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\,dt$

(a)

$f(x) = \cos x \cdot \sqrt{1-\sin x^2} + \sin x \sqrt{1-\cos x^2}$

$= \cos x \cdot \cos x + \sin x + \sin x^2$

$= \cos x - \sin x^2 = 1$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = x + b}$

(2) Pour calculer b on cherche l'image de 0 par fonction

$f(0) = \int_{\cos 1}^{\sin 0} \sqrt{1+t^2}\,dt =$

$\int_1^0 \sqrt{1-t^2}\,dt = -\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$

$= -\left[\frac{2}{3}(1+t^2)\sqrt{1-t^2}\right]_0^1$

$= -\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \boxed{f(x) \quad x + \frac{2}{3}}$