Nom : Moussa ~~y~~ Souleymane
N° : 1836
Ecole : ERRAJA
Classe 7C

BAC 2015 SN

EX3

$f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

1.a) * $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 1$

Car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 0$ Car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = \infty$

Interpretation graphique:

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ (C) admet une assymptote horizontale d'équat° $y = 1$ au voisinage de $-\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (C) admet une assymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$

b) $f'(x) = \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2} < 0$

T.V de f

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

$\begin{cases} f \text{ est Continue} \\ \text{et Strictement décroissante sur } \mathbb{R} \\ f(\mathbb{R}) =]0,1[\end{cases}$

Alors $f : \mathbb{R} \to]0,1[$ est bijective

$J =]0,1[$

Pour exprimer $f^{-1}(x)$, On pose $y = f(x)$

On a : $y = \dfrac{1}{1+e^x} \Rightarrow y(1+e^x) = 1$

$\Rightarrow y + ye^x = 1$

$\Rightarrow ye^x = 1 - y$

$\Rightarrow e^x = \dfrac{1-y}{y}$

$\Rightarrow x = \ln\left(\dfrac{1-y}{y}\right)$

D'où : $f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{x}\right)$

$x \in]0,1[$

2.a) On verifi une égalité du Type :

$\boxed{f(2a - x) + f(x) = 2b}$

EX 3 (Suite)

2) a) $(a ; b) = (0 ; \frac{1}{2})$

• On a : $f(2a-x) = f(-x)$

$$= \frac{1}{1+e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^x}{e^x+1}$$

Donc : $f(2a-x) + f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x}$

$$f(2a-x) + f(x) = \frac{e^x+1}{e^x+1} = 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 2b.$$

D'où $\Omega(0 ; \frac{1}{2})$ est un Centre de symétrie de la Courbe (C)

b) Les Courbes (C) et (C') sont symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$

S'il se Coupent en un point d'abscisse x alors x vérifie $f(x) = x$, soit $f(x) - x = 0$

On pose $v(x) = f(x) - x$

v est dérivable (donc Continue) sur $\mathbb{R}$, avec $v'(x) = f'(x) - 1$

$$v'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} - 1 = -\left(1 + \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)$$

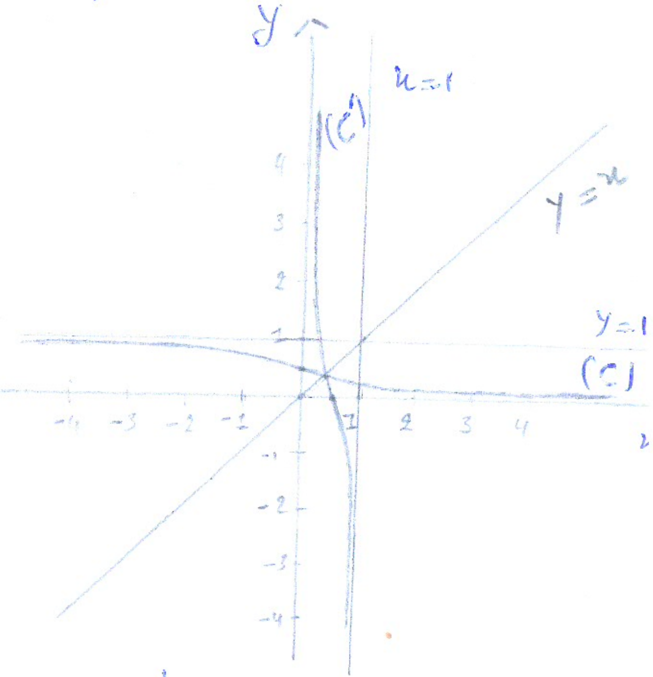
Il est Claire que pour toute x de $\mathbb{R}$. $v'(x) < 0$. D'où v est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{cases} v(0{,}4) = 1{,}3 \times 10^{-3} > 0 \\ v(0{,}5) = -0{,}12 < 0 \end{cases}$$

Donc : $v(0{,}4) \cdot v(0{,}5) < 0$

d'après le théorème de valeurs intermédiai[res] L'équation $v(x) = 0$ admet une solution α telle que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$. (v est Continue sur $[0{,}4 ; 0{,}5]$ et Change de signe). D'après Le théorème de la bijection réciproque. (v est Continue est strictement monotonie. La solution α est unique.



d) par symétrie L'aire Cherchée A est égale au double de L'aire Comprise entre (C) la droite $y = x$ et les droite Verticales d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$ L'axe (oy)

$$A = 2\int_0^\alpha (f(x) - x)\,dx$$

$$= 2\int_0^\alpha \left(\frac{1}{1+e^x} - x\right)dx$$

$$= -2\int_0^\alpha \left(\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + x\right)dx$$

Ex 3 (suite)

2.d) (suite)

$$A = 2\int_0^{\alpha}\left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}+x\right)dx$$

$$A = -2\int_0^{\alpha}\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}+x\ dx.$$

$$A = -2\left[\left(\ln(e^{-x}+1)+\frac{1}{2}x^2\right)\right]_0^{\alpha}$$

$$A = -2\left(\ln(e^{-\alpha}+1)+\frac{1}{2}\alpha^2-\ln 2\right)$$

$$A = -2\ln(e^{-\alpha}+1)-\alpha^2+2\ln 2$$

$$A = 2\ln\left(\frac{2}{e^{-\alpha}+1}\right)-\alpha^2$$

$$\boxed{A = 2\ln\left(\frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}\right)-\alpha^2}$$

3) On a : $I_n = \int_0^{\alpha} f^n(t)\,dt.$

a) $$I_1 = \int_0^{\alpha}\frac{1}{e^{t}+1}\,dt$$

$$I_1 = \int_0^{\alpha}\frac{1}{e^{t}+1}\times\frac{e^{-t}}{e^{-t}}\,dt.$$

$$I_1 = -\int_0^{\alpha}\frac{-e^{-t}}{e^{-t}+1}\,dt.$$

$$I_1 = -\left[\ln(e^{-t}+1)\right]_0^{\alpha}$$

$$I_1 = -\ln(e^{-\alpha}+1)+\ln 2$$

$$I_1 = -\ln\left(\frac{e^{\alpha}+1}{e^{\alpha}}\right)+\ln 2$$

$$I_1 = \ln\left(\frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}\right)+\ln 2$$

$$I_1 = \ln\left(\frac{1}{e^{\alpha}+1}e^{\alpha}\right)+\ln 2$$

$I_1 = \ln(\alpha e^{\alpha})+\ln 2$: Car $f(\alpha)=\alpha$

$$I_1 = \ln(\alpha)+\alpha+\ln 2$$

$$\boxed{I_1 = \alpha+\ln(2\alpha)}$$

3.b) On a ; $f'(x) = \dfrac{-e^{x}}{(1+e^{x})^2}$

$$f^2(x)-f(x) = \frac{1}{(1+e^{x})^2}-\frac{1}{1+e^{x}}\times\frac{1+e^{x}}{1+e^{x}}$$

$$= \frac{1}{(1+e^{x})^2}-\frac{1+e^{x}}{(1+e^{x})^2}$$

$$= \frac{-e^{x}}{(1+e^{x})^2} = f'(x)$$

Donc : $f'(x) = f^2(x)-f(x)$

c) d'après b) en multipliant par $f^{n-1}(x)$

On obtient ; $f'(x)f^{n-1}(x) = f^{n+1}(x)-f^n(x)$

Par intégration de 0 et α.

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha} f'(x)f^{n-1}(x)\,dx = \int_0^{\alpha} f^{n+1}(x)\,dx-\int_0^{\alpha} f^n(x)\,dx$$

$$\Rightarrow I_{n+1}-I_n = \left[\frac{1}{n}f^n(x)\right]_0^{\alpha}$$

$$\Rightarrow I_{n+1}-I_n = \frac{1}{n}\left[f^n(\alpha)-f^n(0)\right]$$

$$\Rightarrow I_{n+1}-I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\Rightarrow I_{n+1}-I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n-\frac{1}{2^n}\right)$$

Ex3 : suite

d) On a ; $\alpha > 0$ et Pour Tout entier naturel non nul n, f^n est Continue et Positive sur $[0,\alpha]$, Alors

$$\int_0^\alpha f^n(t)\,dt \geq 0 \text{ , D'où } I_n \geq 0$$

Donc (I_n) est positive.

D'autre part, Pour Tout entier naturel non nul n On a :

$$0 < \alpha < 0{,}5 \Rightarrow 0 < \alpha^n < \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow \alpha^n < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \alpha^n - \frac{1}{2^n} < 0$$

$$\Rightarrow I_{n+1} - I_n < 0$$

D'où (I_n) est décroissante

On en déduit que La suite (I_n) est Convergente Car décroissante est minorée.

4.a) On sait que f est décroissante

Donc : $0 \leq t \leq \alpha$

$$\Rightarrow f(\alpha) \leq f(t) \leq f(0)$$

$$\Rightarrow \alpha \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \quad \text{et } \alpha > 0$$

$$\Rightarrow \alpha^n \leq f^n(t) \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow \int_0^\alpha \alpha^n\,dt \leq \int_0^\alpha f^n(t)\,dt \leq \int_0^\alpha \frac{1}{2^n}\,dt$$

$$\Rightarrow \alpha^n [t]_0^\alpha \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}[t]_0^\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^n \cdot \alpha \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}\cdot\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}}$$

Comme $0 < \alpha < 1$ On a ; $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^{n+1} = 0$

aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0$

Alors ; d'après le Théorème de gendarme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$

b) On a Pour Tout $n > 0$

$$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$$

Donc ; Pour ; $n=1$; $I_2 - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$

$n=2$; $I_3 - I_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{(2)^2}\right)$

$n=3$; $I_4 - I_3 = \frac{1}{3}\left(\alpha^3 - \frac{1}{(2)^3}\right)$

$\vdots$

$n-1$; $I_n - I_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

par addition membre à membre et simplification.

$$I_n - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3}\left(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\Rightarrow I_n = I_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$$

$$\Rightarrow I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$$

On peut écrire :

$$I_n - (\alpha + \ln(2\alpha)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$$

Par Passage aux limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right) = \lim_{n\to+\infty} I_n - \lim_{n\to+\infty}(\alpha + \ln(2\alpha))$$

Comme ; $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha + \ln(2\alpha)) = \alpha + \ln(2\alpha)$ Car indépendante de n.

$$\Rightarrow \lim \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right) = -(\alpha + \ln(2\alpha))$$