Nom : Moussa Soulaymane
N° : 1836
Classe : 7C
Ecole : ERRAJA

BAC 2011 SC

Ex2

1) $g(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2$

a) $D_g = \mathbb{R}$

g est continue et dérivable sur D_g

• Limites aux bornes.

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 - x^2 - 2x + 2$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^3 - x^2 - 2x + 2$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$

• Dérivé et sens de variation.

$g'(x) = -3x^2 - 2x - 2$ On pose

$\Delta = (-2)^2 - 4(-3)(-2) = 4 - 24 = -20 < 0$

$\Delta < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$

• Tableau de variations

x	$-\infty$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

b) D'après le tableau de variation g est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

c) Comme g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution (α)

On a : $g(0{,}6) > 0$ et $g(0{,}7) < 0$

d'où $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$

2) $f(x) = \dfrac{2xe^{-x}}{x^2 + 2}$

a) $f'(x) = \dfrac{(2e^{-x} - 2xe^{-x})(x^2+2) - 2xe^{-x} \cdot 2x}{(x^2+2)^2}$

$= \dfrac{2x^2e^{-x} + 4e^{-x} - 2x^3e^{-x} - 4xe^{-x} - 4x^2e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

$= \dfrac{2(-x^3 - x^2 - 2x + 2)e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

EX2 (suite)

b) Etude de f

- Limites aux bornes

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2xe^{-x}}{x^2+2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{-x}}{x^2}\left(\frac{2}{\frac{x^2+2}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{xe^{x}}\left(\frac{2}{1+\frac{2}{x^2}}\right)$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2xe^{-x}}{x^2+2} = 0\times 2 = 0$$

- Dérivé et sens de variations

Dérivé déja Calculée elle a même signe que g.

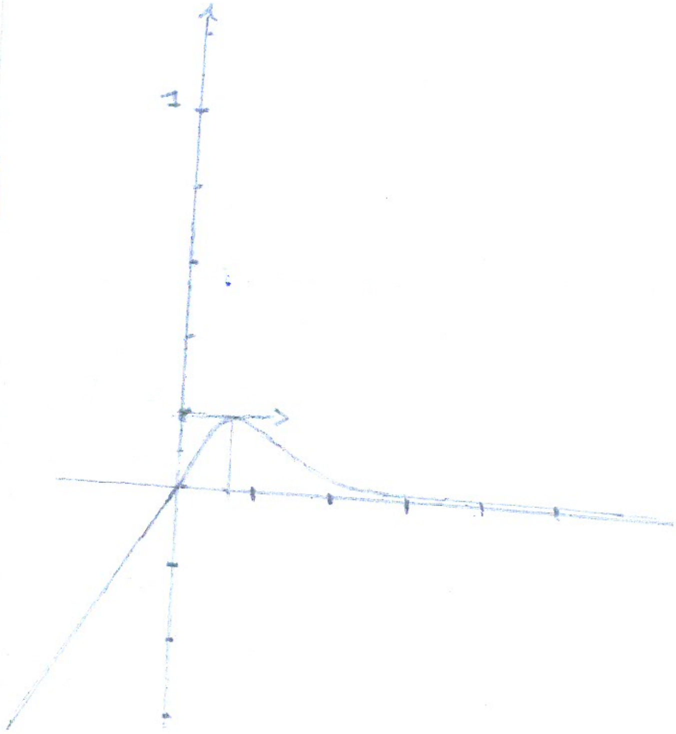
- Tableau de variations

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ 0

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2e^{-x}}{x^2+2} = +\infty \text{ d'où}$$

f : admet une branche Parabolique de direction (oy) en $(-\infty)$

c) Représentation graphique de f.



3) $u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$ Pour Tout $n \geq 1$

a) On a : $n \leq t \leq n+1$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{2t}{t^2+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{2te^{-t}}{t^2+1} \leq e^{-t}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_n^{n+1} \frac{2te^{-t}}{t^2+1}\,dt \leq \int_n^{n+1} e^{-t}\,dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \left[-e^{-t}\right]_n^{n+1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq -e^{-(n+1)} + e^{-n}$$

d'où $0 \leq u_n \leq \left(1 - \frac{1}{e}\right)e^{-n}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$; d'après le TH des gendarmes.

EX2 (suite)

b) On a : $0 \leq u_n \leq \left(1-\frac{1}{e}\right)e^{-n}$

Soit $0 \leq u_n \leq 10^{-5}$

$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{e}\right)e^{-n} \leq 10^{-5}$

$\Rightarrow e^{-n} \leq \dfrac{10^{-5}}{\left(1-\frac{1}{e}\right)}$

$\Rightarrow -n \leq \ln \dfrac{10^{-5}}{\left(1-\frac{1}{e}\right)}$

$\Rightarrow n \geq -\ln \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)10^{5}}$

$\Rightarrow n \geq \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) + \ln 10^{5}$

$\Rightarrow n \geq 12$

Donc : $\boxed{n_0 = 12}$