Mouhamed Kaber / Salem
classe : 7D2
Ecole : Erreja

Bac 2012

1-a- Resoudre

$z^2-4z+5=0$

$\Delta=(-4)^2-4(1)(5)$

$=16-20=-4=(2i)^2$

$\delta=2i$

$z_1=\frac{4+2i}{2}=2+i$

$z_2=\frac{4-2i}{2}=2-i$

b)- $z_3=i+z_1=i+2+i=2+2i$

$|z_3|=2\sqrt{2}$ $\arg(z_3)=\frac{\pi}{4}$

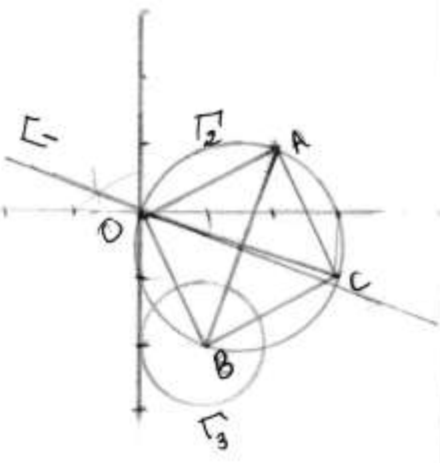
f.T $z_3=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2)- $z_A=z_1=2+i \Rightarrow A(2,1)$

$z_B=-1-i+z_2=-1-i+2-i$

$=2-1-2i=1-2i \Rightarrow B(1,-2)$

a)-



$\frac{z_A}{z_B}=\frac{2+i\,(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{2+4i+i-2}{1^2+2^2}$

$=\frac{5i}{1+4}=\frac{5i}{5}=i$

On remarque $O(0,0)$

$\frac{z_A-z_O}{z_B-z_O}=i$

donc le triangle AOB est isocèle rectangle en O.

b). L'affixe du point C telque OACB est un parallelogramme

$z_O+z_C=z_A+z_B$

$z_C=z_A+z_B-z_O$

$=2+i+1-2i=2+1-2i+i$

$=3-i$

$z_C=3-i \Rightarrow C(3,-1)$

3)- pour tout nombre complexe z telque $z\neq 1-2i$

On pose : $f(z)=\frac{z-2-i}{z-1+2i}$

a)-

$\omega=f(3-i)=\frac{3-i-2-i}{3-i-1+2i}=\frac{1-2i}{2+i}$

$=\frac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i-4i-2}{2^2+1^2}$

$=\frac{-5i}{5}=-i$

$\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=-i \Rightarrow$ BOA est isocèle rectangle en O

b)- $M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-2-i}{z-1+2i}\right|=1$

$\Leftrightarrow \left|\frac{z-(2+i)}{z-(1-2i)}\right|=1$

$\Leftrightarrow \left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|=1$

$\Leftrightarrow |z-z_A|=|z-z_B|$

$\Leftrightarrow AM=BM$

donc Γ_1 decrit mediatrice du segment [AB].

c)- $M \in \Gamma_2 \iff f(z)$ est imaginaire pur

$\iff \arg(f(z)) = \frac{\pi}{2} \; [\pi]$

$\iff \arg\left(\frac{z-2-i}{z-1+2i}\right) = \frac{\pi}{2} \; [\pi]$

$\iff \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2} \; [\pi]$

donc Γ_2 decrit cercle de diametre [AB] privée de A et B.

d)- $M \in \Gamma_3 \iff |f(z)-1| = \sqrt{10}$

$\iff \left|\frac{z-2-i}{z-1+2i} - 1\right| = \sqrt{10}$

$\iff \left|\frac{\cancel{z}-2-i-\cancel{z}+1-2i}{z-1+2i}\right| = \sqrt{10}$

$\iff \left|\frac{-1-3i}{z-1+2i}\right| = \sqrt{10}$

$\iff |-1-3i| = |z-1+2i|\sqrt{10}$

$\iff |z-1+2i|\sqrt{10} = \sqrt{10}$

$\iff |z-1+2i| = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$

$\iff |z-(1-2i)| = 1$

$\iff |z-z_B| = 1$

$\iff BM = 1$

donc Γ_3 decrit un cercle de centre B et de rayon 1.