Mouhemeden ol Ahmedou

ERRAJA 7D2

Solution de l'exercice

~~Exercice~~

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{2 U_n} \end{cases}$$

1) Calcule de U_1 et U_2

$U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2}$

$U_2 = \sqrt{2+U_1} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

b) montre que $0 \leq U_n < 2$

o $n=0$; $U_0 = 0 \Rightarrow 0 \leq U_0 \leq 2$

la relation est vrai pour $n=0$

2) Suppose $0 \leq U_n \leq 2$

montre que $0 \leq U_{n+1} < 2$

$\cancel{2 \leq U_{n+1} < 4}$

d'apres l'hypothese en ajoutant 2

on a $2 \leq 2+U_n < 4$

$\Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{2+U_n} < \sqrt{4} \Rightarrow 0 < \sqrt{2} < U_{n+1} < 2$

$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} < 2$

Ce qui il faut demontrer

3) Conclusion

$\boxed{\forall n : 0 \leq U_n < 2}$

2) $V_n = 2 - U_n$

a) On a $V_n > 0$ car $U_n < 2$.

$\Rightarrow U_{n+1} > 0$ et $U_n > 0 \Rightarrow \boxed{\frac{V_{n+1}}{V_n} > 0}$

D'autre part

$\frac{V_{n+1}}{V_n} - \frac{1}{2} = \frac{2V_{n+1} - V_n}{2V_n}$

$= \frac{2(2-U_{n+1}) - (2-U_n)}{2V_n}$

$= \frac{2-2U_{n+1}+U_n}{2V_n}$

$= \frac{2+U_n-2\sqrt{2+U_n}}{2V_n}$

$= \frac{(\sqrt{2+U_n}-1)^2 - 1^2}{2V_n}$

$= \frac{(U_{n+1}-1)^2-1}{2V_n}$

$= \frac{(U_{n+1}-2)(U_{n+1})}{2V_n}$

$= \frac{-V_{n+1} \cdot U_{n+1}}{2V_n}$

$\frac{V_{n+1}}{V_n} - \frac{1}{2} < 0$ car $\begin{cases} V_n > 0 \\ V_{n+1} > 0 \\ U_{n+1} > 0 \end{cases}$

$\frac{V_{n+1}}{V_n} - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \boxed{\frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2}}$

En fin pour $n \in \mathbb{N}$

$\boxed{0 \leq \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2}}$

Comme (V_n) est positive avec

$\frac{V_{n+1}}{V_n} < 1$ alors (V_n) est decroissent

On a $U_n = 2 - V_n$

$\Rightarrow U_{n+1} = 2 - V_{n+1}$ et

$U_{n+1} - U_n = 2 - V_{n+1} - (2 - V_n)$

$= -V_{n+1} + V_n$

$= -(V_{n+1} - V_n)$

$U_{n+1} - U_n \geq 0$ (V_n) est decroissante

alors (U_n) est croissante

b) pour $n=0$

1er membre : $V_0 = 2 - U_0 = 2$

2e membre : $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

$2 < 2$ alors $0 \leq V_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ est vrai

2) On suppose que

$0 \leq V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

et montre que $0 \leq V_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

d'apres l'hypothese

$0 \leq V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

On a $0 < \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 \leq V_{n+1} \leq \frac{1}{2} V_n$

$0 \leq \frac{1}{2} V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$0 \leq \frac{1}{2} V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

$\Rightarrow 0 \leq V_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

3 conclusion

pourtout $n \in \mathbb{N}$

$0 \leq V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

D'apres le theorime de gendarmes

$\lim\limits_{n \to 0} V_n = 0$

Donc $\lim (2 - U_n) = 0 \Rightarrow \lim U_n = 2$