http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Marieme , Mariem, Khadiyetou

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $I=\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ par : $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{\sin x}$

1) Démontrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Démontrer que: $\forall x\in I;\quad f'(x)=(f(x)-1)\sqrt{(f(x))^2-2f(x)}$

3) Démontrer que f^{-1} est dérivable sur J et calculer sa dérivée.

Solution

$I=\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$

1) $\forall x\in I,\ f(x)=\dfrac{1+\sin x}{\sin x}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=2$

$\lim\limits_{x\to\pi} f(x)=\dfrac{1+\sin\pi}{0^+}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

$f(x)=\dfrac{\cos x(\sin x)-\cos x(\sin x+1}{\sin^2 x}$

$f(x)=\dfrac{\cos x\sin x-\cos x\sin x-\cos x}{\sin^2 x}$

$=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$

Or $\cos x\leqslant 0\ \forall x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$

$\Rightarrow f'(x)>0$

x	$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$

• f continue sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$

• f est $\nearrow$ sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$

$f(I)=[2,+\infty[$

$\Rightarrow$ f realise une bijection de I sur $J=[2,+\infty[$

2) $(f(x)-1)\sqrt{(f(x))^2-2f(x)}$

$=\left(\dfrac{1+\sin x-1}{\sin x}\right)\sqrt{\dfrac{(1+\sin x)^2}{\sin^2 x}-2\left(\dfrac{1+\sin x}{\sin x}\right)}$

$=\dfrac{1}{\sin x}\sqrt{\dfrac{1+2\sin x+\sin^2 x}{\sin^2 x}+\dfrac{-2-2\sin x}{\sin x}}$

$=\dfrac{1}{\sin x}\sqrt{\dfrac{1+2\sin x+\sin^2 x}{\sin^2 x}+\dfrac{-2\sin x-2\sin^2 x}{\sin^2 x}}$

$=\dfrac{1}{\sin x}\sqrt{\dfrac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}}=\dfrac{1}{\sin x}\sqrt{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}$

$=\dfrac{1}{\sin x}\dfrac{\sqrt{\cos^2 x}}{\sqrt{\sin^2 x}}=\dfrac{1}{\sin x}\times\dfrac{-\cos x}{\sin x}$

$\frac{1}{2}$

$= \frac{-\cos x}{\sin x} = f'(x)$

3) f est derivable sur I et $\forall x \in I / \{\frac{\pi}{2}\} . f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \neq 0$

$\Rightarrow f^{-1}$ est derivable sur $]2, +\infty[$ et $\forall x \in]2, +\infty[$

$f'^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$f'(x) = (f(x) - 1)\sqrt{f^2(x) - 2f(x)}$

$f'(f^{-1}(x)) = (x-1)\sqrt{x^2 - 2x}$

$f'^{-1}(x) = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2 - 2x}}$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Marieme, Mariem, Khadjetou.

Exercice 9

> Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{2x-4}$ et (C) sa courbe représentative, dans un repère orthonormé.
> 1) Etudier les variations de f et construire (C).
> 2) On considère l'homothétie h de centre $\Omega(2;1)$ et de rapport k tel que $k \in IR^{*}\setminus\{1\}$. Trouver une équation cartésienne de (C_k) image de (C) par h. Construire (C) et (C_2) dans le même repère.

Solution :

$f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-4}$

1) $D_f :]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

* $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = 1$

* $\lim\limits_{2^-} f(x) = \dfrac{5}{0^-} = -\infty$.

* $\lim\limits_{2^+} f(x) = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$.

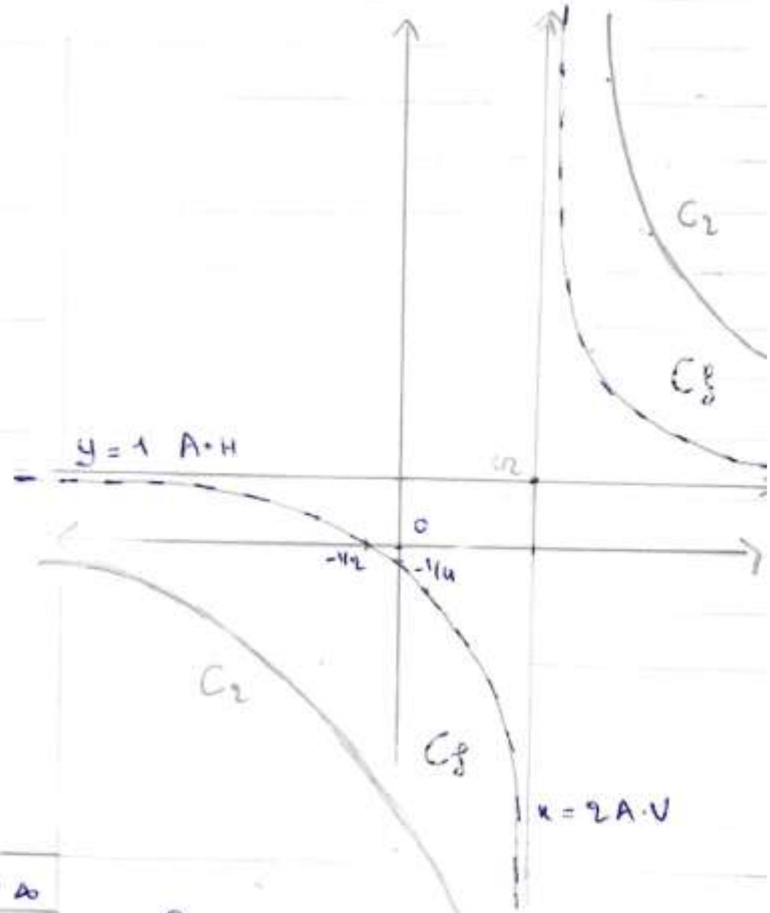
$f'(x) = \dfrac{2(2x-4)-2(2x+1)}{(2x-4)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-10}{(2x-4)^2} < 0$

le T.V de f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	$\|$	$+\infty \searrow 1$

* $C \cap (ox)$: $2x+1=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$
* $C \cap (oy)$: $f(0) = -\dfrac{1}{4}$.



2) $h(\omega, k)(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\omega M'} = k\overrightarrow{\omega M}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'-2 = k(x-2) \\ y'-1 = k(y-1) \end{cases}$

E-q : Cartésienne de $C_k = h(C)$

$x'-2 = k(x-2) \Rightarrow x-2 = \dfrac{1}{k}(x'-2)$

$\Rightarrow \boxed{x = \dfrac{1}{k}(x'-2)+2}$

$$y'-1 = k(y-1) \Rightarrow (y'-1)\frac{1}{k} = y-1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{k}(y'-1)+1}$$

D'ou une équation Cartésienne de C_k est :

$$\frac{y'-1+k}{k} = f\left(\frac{x'-2+2k}{k}\right) \Rightarrow \frac{y'-1+k}{k} = \frac{2\left[\frac{1}{k}(x'-2)+2\right]+1}{2\left[\frac{1}{k}(x'-2)+2\right]-4}$$

$$\Rightarrow \frac{y'-1+k}{k} = \frac{\frac{2}{k}x' - \frac{4}{k} + 4 + 1}{\frac{2}{k}x' - \frac{4k}{k} + 4 - 4} \Rightarrow \frac{1}{k}(y'-1)+1 = \frac{\frac{2x'-4+5k}{k}}{\frac{2x'-4}{k}}$$

$$\frac{1}{k}(y'-1)+1 = \frac{2x'-4+5k}{2x'-4} \Rightarrow \frac{y'}{k} - \frac{1}{k} = \frac{2x'-4+5k}{2x'-5} - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{k} = \frac{2x'-4+5k}{2x'-4} + \frac{1-k}{k} \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{k} = \frac{2kx'-4k+5k^2+2x'-4-2kx'+4k}{k(2x'-4)}$$

$$\boxed{y' = \frac{2x'+5k^2-4}{2x'-4}}$$

$$\boxed{C_2 : y' = \frac{2x'+16}{2x'-4}}$$

Marieme, Mariem, Khadijetou

Exercice 15 (Bac 2013 sc)

Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^3 + 2(n+2)x + 1$.

Le paramètre n est un entier naturel.

Soit C_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1.a) Dresser le tableau de variation de la fonction $f_0(x) = x^3 + 4x + 1$.

b) Montrer que l'équation $f_0(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique U_0 et que $U_0 \in]-1,0[$.

c) Tracer C_0.

2.a) Montrer que toutes les courbes C_n passent par un point fixe A que l'on déterminera.

b) Etudier les positions relatives des courbes C_n et C_{n+1}.

3 .a) Prouver que pour tout entier naturel, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution U_n et que $U_n \in]-1,0[$

b) On considère la suite de terme général U_n.

Montrer que la suite (U_n) est croissante. En déduire qu'elle est convergente.

Solution:

1)a) $f_0(x) = x^3 + 4x + 1$

* $f_0'(x) = 3x^2 + 4 > 0$ donc f_0 est strictement croissant sur $\mathbb{R}$.

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^3 = -\infty$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

* T.V (Tableau de variation de f)

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f_0'(x)$	+
$f_0(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

b) $f_0 : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ réalise une bijection car elle est continue (polynôme) et croissante sur $\mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{R}$ donc $\exists\ U_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f_0(U_0) = 0$ mais $f_0(-1) = -4 < 0$ $\Rightarrow f_0(U_0) < f_0(0) = 1$ donc $-1 < U_0 < 0$ car f_0 est croissant

Marieme, Mariem, Khadjetou.

Exo : 3

$f(x) = x^3 - \frac{4}{x^{1}}$

$f(x) = \sin x$ admet une solution dans l'intervalle $[1, 2]$

$g(x) = x^4 - \frac{4}{x} - \sin x$

$g(1) = 1 - 4 - \sin(1) = -3{,}84 < 0$

$g(2) = 16 - 2 - \sin(2) = 13{,}1 > 0$

$\Rightarrow \exists \alpha \in [1, 2]$

$\boxed{g(x) = 0} \Rightarrow \boxed{x^4 - \frac{4}{x} = \sin x}$

Pour vérifier l'unicité de cette solution :

$g'(x) = 4x^3 + \frac{4}{x^2} - \cos x$

• $g'(x) \geq 0 \Rightarrow g$ est croissante sur $[1, 2]$ et par conséquence la solution est unique.

Exo : 6

$f(x) = x + \tan x \quad [-\pi ; \pi]$

$f'(x) = 1 + \frac{1}{\cos^2 x}$ ou $f'(x) = 2 + \tan^2 x$

$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement $\nearrow$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$			$+$			$+$	
$f(x)$	$-\pi \nearrow$ α 0 $\nearrow +\infty$			$-\infty \nearrow$ β 0 $\nearrow +\infty$				$-\infty \nearrow$ γ 0 $\nearrow \pi$	

$f(0) = 0$; $f(\pi) = \pi$

• $f(-\pi) = -\pi$

• $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$ $\Rightarrow f : [-\pi, -\frac{\pi}{2}[\to]-\pi, +\infty[$

$0 \in]-\pi, +\infty[\Rightarrow$

$\exists \alpha \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$

tq $f(\alpha) = 0$

• $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to]-\infty, +\infty[$ $0 \in]-\infty, +\infty[\Rightarrow$

$\exists \alpha \in -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

tq $f(\alpha) = 0$

• $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$

• $f(\pi) = \pi$

$\Rightarrow f :]\frac{\pi}{2}, \pi] \to]-\infty ; \pi]$

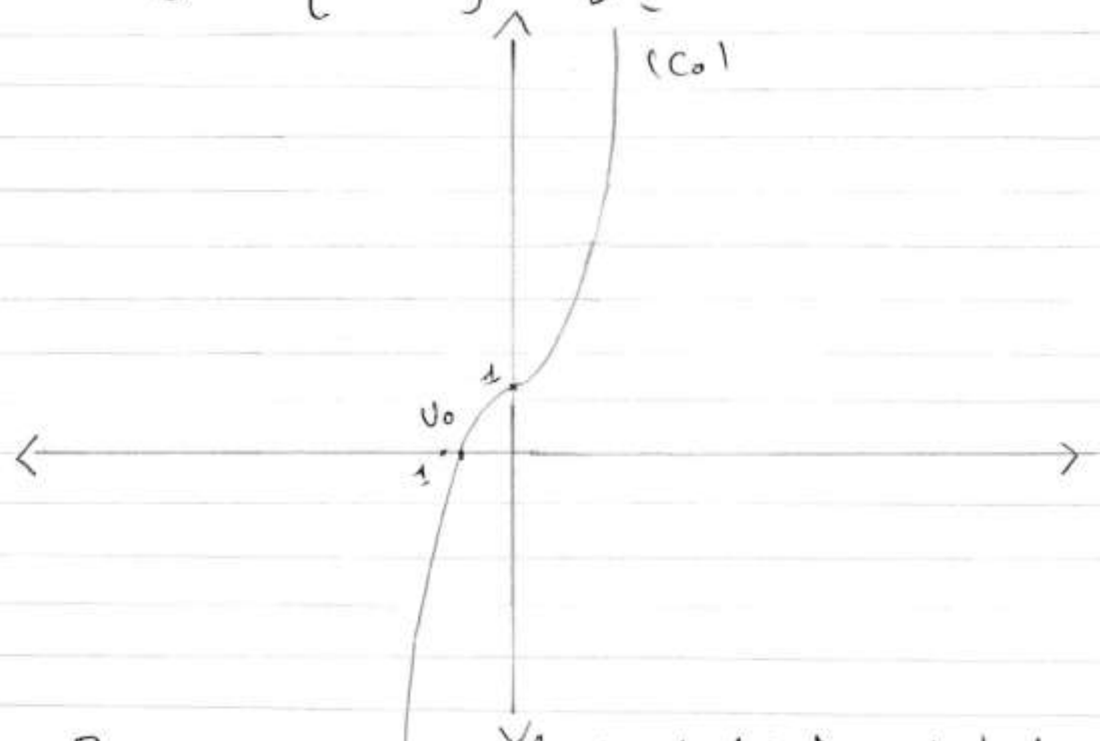
$0 \in]-\infty ; \pi[\Rightarrow \exists \alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

tq $f(\alpha) = 0$

c) * Branches infinies de C_0 :
Comme on a $\lim\limits_{\pm\infty} \frac{f_0(x)}{x} = \lim\limits_{\pm\infty} x^2 = +\infty$.
alors C_0 admet une Branche parabolique de direction (
en $\pm\infty$.

* $(C_0)\cap(ox) = \{(U_0, 0)\}$ car $f_0(U_0) = 0$

* $(C_0)\cap(oy) = \{(0, 1)\}$ car $f_0(0) = 1$.



2°) a) * M_1 : on remarque : $f_n(0) = 1$ (independant de n)
alors $A(0,1) \in C_n \quad \forall n \geq 0$
* M_2 : Si $A(x,y) \in \cap C_n$ alors $\forall n \geq 0 \quad A(x,y) \in C_n \cap C_{n+1}$
donc $y = f_n(x) = f_{n+1}(x) \Rightarrow f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0$

$\Rightarrow x^3 + 2(n+1+2)x + 1 - x^3 - 2(n+2)x - 1 = 0$
$2x = 0 \Rightarrow x = 0$ donc $y = f_n(0) = 1$ alors
$A(0,1) = C_{n+1} \cap C_n \quad \forall n \geq 0$.
* M_3 : Soit $A(x,y) = C_{n+1} \cap C_n \quad \forall n \geq 0 \Rightarrow A \in C_n$
$\Rightarrow \forall n \geq 0 \quad y = f_n(x) = x^3 + 2(n+2)x + 1$
donc $\forall n \geq 0 \quad 2nx + 4x + 1 + x^3 + y = 0 = 0 \cdot n + 0$
par identification $\begin{cases} 2x = 0 \\ 4x + 1 + x^3 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1. \end{cases}$
donc $A(0,1) = \bigcap\limits_{n \geq 0} C_n$

$\frac{2}{3}$

b'- position relative entre C_n et C_{n+1}

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^3 + 2(n+3)x + 1 - x^3 - 2(n+2)x - 1 = 2x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$	$-$	0	$+$
P.R	C_n / C_{n+1}	$C_n = C_{n+1}$	C_{n+1} / C_n

3) a) $f_n'(x) = 3x^2 + 2(n+2) > 0$ donc f_n est strictement croissant, et continue (polynôme) donc f_n realise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. $0 \in \mathbb{R}$ alors $\exists!\ U_n \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(U_n) = 0$, mais $f_n(-1) = -2(n+2) < 0 = f_n(U_n)$ donc $-1 < U_n < 0$

b). on a $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ car $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$ $\forall\ x \in]-\infty, 0[$. $U_n \in]-1, 0[$ donc $\underbrace{f_{n+1}(x) - f_n(x)}_{0} < 0$ alors $f_{n+1}(U_n) < 0 = f_{n+1}(U_{n+1})$ donc : $U_n < U_{n+1}$ car f_{n+1} est $\nearrow$ donc (U_n) est $\nearrow$ mais $U_n < 0$ donc (U_n) est croissant puis majoreé alors (U_n) est convergente.