Non des élèves
- Marieme /Elemin Val
- Oumoukelthoum / sidi md
- Khdeija /sidi

Exo1 : Les fonct°

Exercice I

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x)=\dfrac{x+x^2+...+x^{2015}-2015}{x-1}$

Calculer $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^k-1}{x-1}$, $(k\in\mathbb{N}^*)$ en déduire $\lim\limits_{x\to1}f(x)$

Solut° :

$\forall\, k\in\mathbb{N}^*$

$$\sum_{p=0}^{k-1} x^p = \frac{x^k-1}{x-1} \quad \left(\text{Somme des termes d'un S.G}\right)$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^k-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\sum_{p=0}^{k-1} x^p$$

$$= \sum_{p=0}^{k-1}\lim_{x\to1} x^p = \sum_{p=0}^{k-1} = k\times 1 = k$$

$$= 1+1+\dots+1\ (k \text{ fois})$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x-1}+\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{x^3-1}{x-1}+\dots+\frac{x^{2015}-1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim \sum_{1}^{2015}\frac{x^k-1}{x-1} = \sum_{1}^{2015}\lim\frac{x^k-1}{x-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{2015} k = \frac{2015\,(1+2015)}{2} = 2031120$$

Generalité sur les fonct°

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Non des élèves
- Marieme / Elemin Val
- Oumoukelthoum / sidi md
- Khdeija / sidi

Exo 4 : les fonct°

Exercice 4

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b] telle que: $f(a) < ab$ et $f(b) > b^2$.
Démontrer qu'il existe un réel c de [a,b] tel que $f(c) = bc$.
(On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $x \mapsto f(x) - bx$).On

Solut° : f Continue Sur $[a;b]$

$f(a) < ab$

$f(b) > b^2$

M.q $\exists$ c $\in [a;b]$ t.q $f(c) = bc$

On Pose $h(x) = f(x) - bx$

Appliquer la T a $h \in [a;b]$

* h est Continue sur $[a,b]$

$h(a) = f(a) - ba < 0$

$h(b) = f(b) - b^2 > 0$

$h(a) \cdot h(b) < 0$

alors $\exists c \in [a;b]$ $h(c) = 0 \Rightarrow$

$f(c) - bc = 0$

$\exists c \in [a;b]$; $h(c) = bc$

Generalité sur les fonct°

Non des élèves
- Marieme /Elemin Val
- Oumoukelthoum /Sidi md
- Khdija /Sidi

Exo 10 : les fonct°

Exercice 10

Soit m un réel et $f_m(x) = x + \frac{m}{2x^2}$.

On désigne par (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier les variations de f_m.

2) Montrer que (C_m) est l'image de (C_1) par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.

3) Soit $M(x_0, y_0)$ un point de (C_1) ; la tangente en M à (C_1) coupe Oy en H, coupe la droite Δ d'équation $y = x$ en K et recoupe (C_1) en M'. Montrer que: $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{M'H}$ et $\overrightarrow{MH} = a\overrightarrow{MK}$.

Solut°:

$f_m(x) = x + \frac{m}{2x^2}$

f_m est definie sur

$2x^2 \neq 0$

$x \neq 0$ Donc $D_{f_m} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim_{\to-\infty} m\left(x + \frac{m}{2x^2}\right) = -\infty$

* Pour $\lim_{\to 0} f_m(x)$

Si $m > 0$ alors $\lim_0 f_m(x) = +\infty$

Si $m < 0$ $\lim_0 f_m(x) = -\infty$

Si $m = 0 \Rightarrow \forall x \neq 0$ $f_0(x)$

Donc: $\lim_0 f(x) = 0$

$f'_m(x) = 1 - \frac{m}{x^3}$

$f'_m(x) = \frac{x^3 - m}{x^2}$

* Si $m = 0$ alors $\forall x \neq 0$

$f_m(x) = x$ et $f'_m(x) = 1$

T.V de f_0 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗ 0	‖	0 ↗	$+\infty$

* Si $m > 0$, alors $f'_m(x) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - m = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{m}$

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{m}$		$+\infty$
$x^3 - m$		$-$		$-$	0	$+$	
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^3-m}{x^3}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Generalité sur les fonct°

Suite Exo 10 :

T.V de f_m $(m>0)$

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{m}$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	$f_m(\sqrt[3]{m})$	$\nearrow$	$+\infty$

* Si $m<0$ alors :

$f'_m(x)=0 \iff x^3=m$

$\iff x = -\sqrt[3]{-m}$

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{m}$		$+\infty$
x^3-m		$-$		$-$	0	$+$	
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^3-m}{x^3}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

T.V

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{m}$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, -\infty$	$\searrow$	$f_m(\sqrt[3]{m})$	$\nearrow$	$+\infty$

Si $m<0 \Rightarrow f'_m(x)=0$

$\iff x^3=m \iff x=\sqrt[3]{m}$

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{m}$		0		$+\infty$
x^3-m		$-$	0	$+$		$+$	
x^3		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x^3-m}{x^3}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

T.V de f_m $(m<0)$

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{-m}$		0		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_m(\sqrt[3]{m})$	$\searrow$	$-\infty \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) $\mathcal{C}_1$ est la courbe de f_1 et $f_1(x) = x + \frac{1}{2x^2}$ une homothétie h_K de centre O et de rapport K transforme $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_m$

ssi $M(x;y) \in \mathcal{C}_1 \iff M'(x';y') \in \mathcal{C}_m$

c-a-d ssi

$y = f_1(x) \iff y' = f_m(x)$ or

$h_K(M) = M' \iff \vec{OM'} = K\vec{OM}$

$\iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Kx \\ Ky \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{array}{l} x' = Kx \\ y' = Ky \end{array}$

(2)

Suite Exo 10

D'où : $y = h_m(x') \Leftrightarrow ky = f_m(km)$

$\Leftrightarrow k f_1(x) = kx + \frac{m}{2(k+x)^2}$

$\Leftrightarrow k\left(\frac{x+1}{2x^2}\right) = kx + 1$

$\frac{m}{2(km^2)} \Leftrightarrow k\left(x + \frac{1}{2x^2}\right)$

$\Leftrightarrow = kx + \frac{m}{2(kx)^2}$

$\Leftrightarrow kx + \frac{k}{2x^2} = kx + \frac{m}{2k^2x^2}$

$\Leftrightarrow kx + \frac{k}{2x^2} = kx + \frac{m}{2kx^2}$

$= \frac{k}{2x^2} = \frac{m}{2x^2x^2} = \frac{m}{2x^2x^2}$

$-2k^3x^2 - 2mk^2$

$\Leftrightarrow k^3 = m \Rightarrow k = \sqrt[3]{m}$

si $m > 0$ et $k = -\sqrt{-m}$ si $m < 0$

(3)

Non ds élèves
- Marième /Elemi Val
- Oumoukelthoum /sidi md
- Khdeija/sidi

Exo 13 : Ls fonct°

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $]0;2[$ par : $f(x)=\tan[\frac{\pi}{2}(x-1)]$.

1) Etudier les variations de f.
2) Montrer que f réalise une bijection de $]0;2[$ sur IR.
3) Soit g la réciproque de f. Montrer que g est continue et dérivable sur IR. Calculer $g'(x)$.
4) Pour tout $x\in IR^*$ on pose $h(x)=g(x)+g(\frac{1}{x})$.
a) Calculer $h'(x)$.
b) En déduire que h est constante sur chacun des intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$.
Déterminer ces deux constantes.

Solut°

1) Vérificat° de f :

$f'(x)=\frac{\pi}{2}\left(1+tg^2\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)\right)$

donc f est ↗ sur $]0,2[$

2) f est dérivable sur $]0;2[$ et croissant donc f réalise un biject° de $]0;2[$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) ; \lim_{x\to 2^-} f(2)[$

$\Rightarrow -\infty;+\infty[=IR$ si

$t=\frac{\pi}{2}(x-1)$

$=\lim_{\to\frac{\pi}{2}} tg(t)=-\infty$ et $\lim_{2} f(x)$

$=\lim_{\frac{\pi}{2}} tg(t)=+\infty$

3) $g=f^{-1}(x)$ est continue et dérivable sur IR car f est continue et dérivable sur $]0;2[$ (composés des fonct° continue et dérivable)

On a $f'(x)=\frac{\pi}{2}(1+f^2(x))$ donc

$g'(x)=f^{-1}(x)$

$=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}(1+f(f^{-1}(x))^2}$

$\boxed{g'(x)=\frac{2}{\pi(1+x^2)}}$

4.a) $h(x)=g(x)+g\left(\frac{1}{x}\right)$

$h(x)=g'(x)-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right)$

$=\frac{2}{\pi(1+x^2)}-\frac{1}{x}\left(\frac{2}{\pi(1+\frac{1}{x^2})}\right)$

$=\frac{2}{\pi(1+x^2)}-\frac{2}{\pi(1+x^2)}=0$

$\Rightarrow \exists k\in IR / h(x)=k$

$f(-\frac{1}{2})=-1$, $f(\frac{3}{2})=1$ $\Rightarrow \begin{cases} g(1)=\frac{1}{2} \\ g(1)=g(-1)+g(-1)\end{cases}$

si $x<0$ $h(x)=f(-1)g(-1)+g(-1)$

$=2g(-1)=1$

$x>0$: $h(x)=h(1)=g(1)+g(1)$

$=2g(1)=3$.

Généralité sur les fonct°