Nom: Mohamed/Brahim vall

N°: 1346

Ecole: ERRaga

BAC 2015 SN

EXO: 3

$f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

1 a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{-\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1$

Car $\lim_{-\infty} e^x = 0$

• $\lim_{+\infty} f(x) = \lim \frac{1}{1+e^x} = 0$

Car $\lim_{+\infty} e^x = +\infty$

Interpretat° graphique

• $\lim_{-\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ AH

• $\lim_{+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ AH

b) $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} < 0$

T.V de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	0

f est Continue et strictement decroissant sur R

$f(\mathbb{R}) =]0;1[$

Alors $f: \mathbb{R} \to]0;1[$ est bijective

$J =]0;1[$

Pour exprime $f^{-1}(x)$ on pose $y = f(x)$

on a: $y = \frac{1}{1+e^x} \Rightarrow y(1+e^x) = 1$

$\Rightarrow y + ye^x = 1 \Rightarrow ye^x = 1 - y$

$\Rightarrow e^x = \frac{1-y}{y}$

$\Rightarrow x = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$

D'où $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$

$x \in]0;1[$

2.a) on verifier une egalité du Type

$f(2a-x) + f(x) = 2b$

$(a;b)(0;\frac{1}{2})$

on a: $f(2a-x) = f(-x)$

$= \frac{1}{1+e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^x}{e^x+1}$

Donc $f(2a-x) + f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x}$

$f(2a-x) + f(x) = \frac{e^x+1}{e^x+1} = 1 = 2 \times \frac{1}{2} = 2b$

D'où $\Omega(0;\frac{1}{2})$ est un Centre de Symetrie de La Courbe $(\mathcal{C})$

b) Les Courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont Symetrique par rapport à la droite d'equat° $y = x$

s'il se Coupent en un point d'abscisse x alors verifie $f(x) = x$; Soit

$f(x) - x = 0$

on pose: $U(x) = f(x) - x$

Ex 03 (Suite)

2) b)

v est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, avec $v'(x) = f'(x) - 1$

$$v'(x) = \frac{-e^{+x}}{(1+e^x)^2} - 1$$

$$= \left(1 + \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)$$

Il est claire que pour toute x de $\mathbb{R}$ $v'(x) < 0$

D'où : v est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

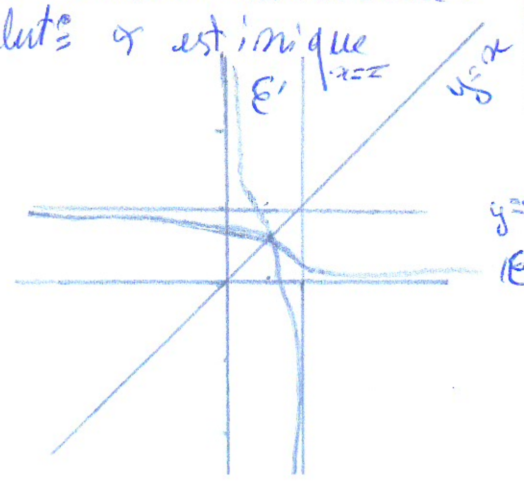
On a :

$$\begin{cases} v(0{,}4) = 1{,}3 \cdot 10^{-3} > 0 \\ v(0{,}5) = -0{,}12 < 0 \end{cases}$$

Donc : $v(0{,}4) \cdot v(0{,}5) < 0$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $v(x) = 0$ admet une solution α telque $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

(v est continue sur $[0{,}4 ; 0{,}5]$ et change de signe) d'après le théorème de bijection réciproque. (v est continue est strictement monotone. La solution α est unique



d) Par symétrie l'aire cherchée A est égale au double de l'aire comprise entre (C) la droite $y = x$ et les droites verticales d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$ l'axe (Oy)

$$A = 2\int_0^\alpha (f(x) - x)\,dx = 2\int_0^\alpha \left(\frac{1}{1+e^x} - x\right)dx$$

$$A = -2\int_0^\alpha \left(-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} + x\right)dx$$

$$A = -2\left[\ln(e^{-x}+1) + \frac{1}{2}x^2\right]_0^\alpha$$

$$A = -2\left[\ln(e^{-\alpha}+1) + \frac{1}{2}\alpha^2 - \ln 2\right]$$

$$A = -2\ln(e^{-\alpha}+1) - \alpha^2 + 2\ln 2$$

$$A = 2\ln\left(\frac{2}{e^{-\alpha}+1}\right) - \alpha^2$$

$$\boxed{A = 2\ln\left(\frac{2e^\alpha}{e^\alpha+1}\right) - \alpha^2}$$

3) On a : $I_n = \int_0^\alpha f^n(t)\,dt$ et

a) $I_1 = \int_0^\alpha \frac{1}{e^t+1}\,dt = \int_0^\alpha \frac{1}{e^t+1} \times \frac{e^{-t}}{e^{-t}}\,dt$

$$\Rightarrow I_1 = -\int_0^\alpha -\frac{e^{-t}}{e^{-t}+1}\,dt$$

$$I_1 = -\left[\ln(e^{-t}+1)\right]_0^\alpha \Rightarrow I_1 = -\ln(e^{-\alpha}+1) + \ln 2$$

$$I_1 = -\ln\left(\frac{e^\alpha+1}{e^\alpha}\right) + \ln 2$$

$$I_1 = \ln\left(\frac{1}{e^\alpha+1} \cdot e^\alpha\right) + \ln 2$$

$$I_1 = \ln(\alpha e^\alpha) + \ln 2 \quad \text{car } f(\alpha) = \alpha$$

$$I_1 = \ln(\alpha) + \ln e^\alpha + \ln 2$$

$$\boxed{I_1 = \alpha + \ln(2\alpha)}$$

b) On a : $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$

$$f^2(x) - f(x) = \frac{1}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{1+e^x} \times \frac{1+e^x}{1+e^x}$$

$$= \frac{1-e^x-1}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} = f'(x)$$

Donc : $f'(x) = f^2(x) - f(x)$

. suit (exo 3)

3) © d'après (b) en multipliant par $f^{n-1}(x)$

on obtien

$f'(x) f^{n-1}(x) = f^{n+1}(x) - f^{n}(x)$

$\Rightarrow$ ~~I~~

Par intégratº de 0 et α

$\Rightarrow \int_0^\alpha f'(x) f^{n-1}(x) = \int_0^\alpha f^{n+1}(x)dx - \int_0^\alpha f^{n}(x)dx$

$I_{n+1} - I_n = \left[\frac{1}{n} f^{n}(x)\right]_0^\alpha$

$= \frac{1}{n}\left[f^{n}(\alpha) - f^{n}(0)\right]$

$\Rightarrow I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^{n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)$

$\boxed{\Rightarrow I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^{n} - \frac{1}{2^n}\right)}$

1) On a; $\alpha > 0$ et pour tout entier naturele non nul n, f^n est continue et positive sur $[0;\alpha]$

alors

$\int_0^\alpha f^{n}(t)dt \geq 0$ donc $I_n \geq 0$

Don (I_n) est positive

D'autre part pour tout entier naturel non nul n on a:

$0 \leq \alpha < 0,5 \Rightarrow 0 < \alpha^{n} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

$\Rightarrow \alpha^{n} < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \alpha^{n} - \frac{1}{2^n} < 0$

$\Rightarrow I_{n+1} - I_n < 0$

D'ou (I_n) est decroissante

on deduit que la suite (I_n) est convergente car decroissante est minoreé

4.a) On sait que f est décroissant

donc $0 \leq t \leq \alpha$

$\Rightarrow f(\alpha) \leq f(t) \leq f(0)$

$\Rightarrow \alpha \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$ et $\alpha \geq 0$

$\Rightarrow \alpha^{n} \leq f^{n}(t) \leq \frac{1}{2^n}$

$\int_0^\alpha \alpha^{n}dt \leq \int_0^\alpha f^{n}(t)dt \leq \int_0^\alpha \frac{1}{2^n}dt$

$\Rightarrow \alpha^{n}[t]_0^\alpha \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}[t]_0^\alpha$

$\Rightarrow \alpha^{n} \cdot \alpha \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}\alpha$

$\Rightarrow \boxed{\alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}}$

Comme $0 < \alpha < 1$ on a: $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha^{n+1} = 0$

aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0$

Alors d'apres le Theorme de gendarme $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}$

b) Pour Tute $n > 0$

$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^{n} - \frac{1}{2^n}\right)$

Donc:

Pour $n=1$; $I_2 - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$

$n=2$; $I_3 - I_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha^{2} - \frac{1}{(2)^2}\right)$

$n=3$; $I_4 - I_3 = \frac{1}{3}\left(\alpha^{3} - \frac{1}{(2)^3}\right)$

$\vdots$

$n-1$: $I_n - I_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{2}{2^{n-1}}\right)$

Par addition membre à membre et simplificatº

Suite (Exo 3)

4) b)

$$I_n - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3}\left(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\Rightarrow I_n = I_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$$

$$\Rightarrow I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$$

On peut écrire :

$$I_n - (\alpha + \ln(2\alpha)) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$$

Par passage aux limites

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} I_n - \lim_{n \to +\infty} (\alpha + \ln(2\alpha))$$

Comme : $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$ et

$$\lim_{n \to +\infty} (\alpha + \ln(2\alpha)) = \alpha + \ln(2\alpha)$$

Car independant de n

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$$

$$= -(\alpha + \ln(2\alpha))$$