- MD YHY SD MD
- 7C2
- Erraja

$\boxed{\text{Bac 2015 (SN)}}$

Exo 1

1) on pose : $P(z)=z^3-(11+6i)z^2+(28+38i)z-12-60i$

1-a) calcul de $P(3)$:

- $P(3)=(3)^3-(11+6i)(3)^2+(28+38i)(3)-12-60i$

$= \cancel{27}-\cancel{99}-\cancel{54i}+\cancel{84}+\cancel{114i}-\cancel{12}-\cancel{60i}=0$

d'où : $P(3)=0$

- pour déterminer a et b on utilise le tableau d'Horner

$z_0=3$

	1	$-11-6i$	$28+38i$	$-12-60i$
3	↓	3	$-24-18i$	$12+6i$
	1	$-8-6i$	$4+20i$	0

Alors : $P(z)=(z-3)(z^2-(8+6i)z+4+20i)$

Donc : $a=-8-6i$ et $b=4+20i$.

b) l'équation $P(z)=0$ équivalent à :

$z-3=0$ ou $z^2-(8+6i)z+4+20i=0$

$\Rightarrow z_0=3$; $\Delta=(-8-6i)^2-4(1)(4+20i)$

$\Rightarrow \Delta=64-36+96i-16-80i=12+16i$

$\Rightarrow \Delta=16-4+2\times4\times2i=(4+2i)^2$

on pose : $\delta=\sqrt{\Delta}=4+2i$

- d'où les solution sont :

$z_1=\dfrac{8+6i+4+2i}{2}=6+4i$ et $z_2=\dfrac{8+6i-4-2i}{2}=2+2i$

conclusion : l'ensemble de solutions de l'équation $P(z)=0$ est $S=\{3;6+4i;2+2i\}$.

c) les points A, B et C sont les images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec : $Im(z_A)<Im(z_B)<Im(z_C)$

Donc : $z_A=3$, $z_B=2+2i$ et $z_C=6+4i$

- $G=bar$

A	B	C
2	-2	2

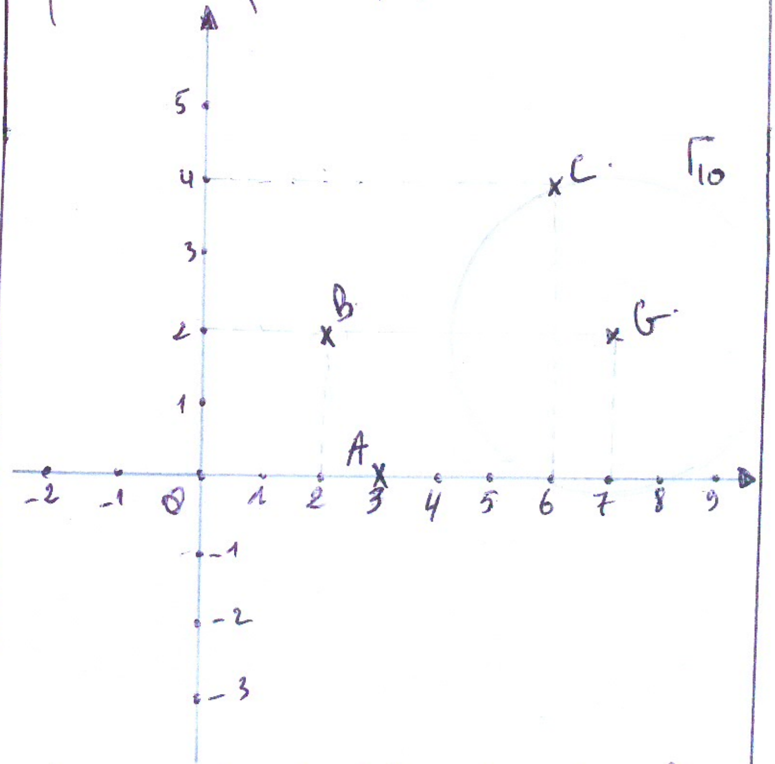
- l'affixe de G est :

$z_G=\dfrac{2z_A-2z_B+2z_C}{(2-2+2)}=\dfrac{2(3)-2(2+2i)+2(6+4i)}{2}$

$\Rightarrow z_G=\dfrac{6-4-4i+12+8i}{2}=\dfrac{14+4i}{2}$

$\Rightarrow \boxed{z_G=7+2i}$

- placons les points A, B, C et G



$A(3;0)$; $B(2;2)$; $C(6;4)$ et $G(7;2)$

• MD YHY SD MD
• 7C2
• Erraja

Bac 2015 (SN)

2) $f_K : \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-K)\overrightarrow{MC}$

a) on désigne par z' et z les affixe respectives de M et M' :

$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-K)\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow z' - z = 2(z_A - z) - 2(z_B - z) + (3-K)(z_C - z)$

$\Leftrightarrow z' - z = 2(3-z) - 2(2+2i-z) + (3-K)(6+4i-z)$

$\Leftrightarrow z' = z + 6 - \cancel{2z} - 4 - 4i + \cancel{2z} + 18 - 6K + 12i - 4Ki - (3-K)z$

$\Leftrightarrow \boxed{z' = (K-2)z + 20 - 6K + (8-4K)i}$

Une expression de type : $z' = az + b$.

avec : $a = K-2$ et $b = 20 - 6K + (8-4K)i$.

f_K est une translation ssi : $a = 1$.

Çad : $K - 2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{K = 3}$

D'où : $z' = z + 2 - 4i$.

Donc f_3 est une translation dont le vecteur a pour affixe $2-4i$; soit $\vec{v}\binom{2}{-4}$

b) si $K \in \mathbb{R} \setminus \{2;3\}$ alors $K-2 \neq 0$ et $K-2 \neq 1$

les points invariants sont d'affixe z vérifiant : $z' = z$

$\Leftrightarrow z = (K-2)z + 20 - 6K + (8-4K)i$

$\Leftrightarrow z - (K-2)z = 20 - 6K + (8-4K)i$.

$\Leftrightarrow z = \dfrac{20 - 6K + (8-4K)i}{3-K}$.

D'où f_K admet un unique point invariant Ω_K d'affixe : $z_K = \dfrac{20-6K+(8-4K)i}{3-K}$

D'après la forme complexe :

$z' = (K-2)z + 20 - 6K + (8-4K)i$

or $K \neq 2$ et $K \neq 3$

alors f_K est l'homothétie de centre Ω_K et de rapport : $K-2$.

c) l'affixe de Ω_K est : $z_K = \dfrac{20-6K+(8-4K)i}{3-K}$

$\Leftrightarrow \Omega_K \begin{cases} x_K = \dfrac{20-6K}{3-K} = \dfrac{6K-20}{K-3} \\ y_K = \dfrac{8-4K}{3-K} = \dfrac{4K-8}{K-3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \Omega_K \begin{cases} x_K = 6 - \dfrac{2}{K-3} & (1) \\ y_K = 4 + \dfrac{4}{K-3} & (2) \end{cases}$

$2(1) + (2)$: $2x + y = 12 - \cancel{\dfrac{4}{K-3}} + 4 + \cancel{\dfrac{4}{K-3}}$

$\Leftrightarrow 2x + y = 16 \Leftrightarrow 2x + y - 16 = 0$

C'est l'équation d'une droite Δ.

• Comme $(x_K ; y_K) = \left(6 - \dfrac{2}{K-3} ; 4 + \dfrac{4}{K-3}\right)$

avec : $\dfrac{2}{K-3} \neq 0$ et $\dfrac{4}{K-3} \neq 0$

on a alors $(x_K ; y_K) \neq (6 ; 4)$

D'où $\Omega_K \neq C(6;4)$

et comme $k \neq 2$, on a $(X_k; Y_k) \neq (X_2; Y_2)$

$\Leftrightarrow (X_k; Y_k) \neq \left(6 - \frac{2}{2-3}; 4 + \frac{4}{2-3}\right)$

$\Leftrightarrow (X_k; Y_k) \neq (8; 0)$

d'où $\Omega_k \neq G_2(8; 0)$.

Conclusion : le lieu géométrique des points Ω_k lorsque k décrit $\mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$ est la droite Δ d'équation : $2x + y - 16 = 0$ privé de $C(6;4)$ et $G_2(8;0)$.

• pour $k = 1$; $\Omega_1 = G_1 = $ bar

A	B	C
2	-2	2

C'est le quatrième somet du parallélogramme ABCG,

avec $\begin{cases} X_1 = 6 - \frac{2}{1-3} = 7 \\ Y_1 = 4 + \frac{4}{1-3} = 2 \end{cases}$ D'où : $\Omega_1(7; 2)$

d) pour $k = 1$ on a : $Z' = -Z + 14 + 4i$

Alors l'affixe du point R centre de gravité du triangle AMM' est : $Z_R = \frac{Z_A + Z + Z'}{3}$.

$\Rightarrow Z_R = \frac{3 + Z - Z + 14 + 4i}{3} = \frac{17 + 4i}{3} = \frac{17}{3} + \frac{4}{3}i$

Alors lorsque M décrit le cercle Γ de centre G passant par C, le point R reste fixe.

3) pour tout M du plan : $\varphi(M) = 2MA^2 - 2MB^2 + 2MC^2$ et Γ_m l'ensemble des points M tel que $\varphi(M) = m$, où $m \in \mathbb{R}$.

comme $2 - 2 + 2 = 2 \neq 0$ et $G = $ bar

A	B	C
2	-2	2

alors : $\varphi(M) = 2MG^2 + \varphi(G)$

Donc si $M \in \Gamma_m \Leftrightarrow 2MG^2 + \varphi(G) = m$.

soit $MG^2 = \frac{m - \varphi(M)}{2}$

• Calculons $\varphi(G)$:

ma : $\varphi(G) = 2GA^2 - 2GB^2 + 2GC^2$

$= 2|Z_A - Z_G|^2 - 2|Z_B - Z_G|^2 + 2|Z_C - Z_G|^2$

$= 2|3 - 7 - 2i|^2 - 2|2 + 2i - 7 - 2i|^2 + 2|6 + 4i - 7 - 2i|^2$

$= 2 \times 20 - 2 \times 25 + 2 \times 5 = 50 - 50 = 0$.

Enfin $\varphi(G) = 0$, d'où $MG^2 = \frac{m - \varphi(M)}{2} = \frac{m}{2}$.

• Discussion suivant les valeurs de m :

• Si $m < 0$: Γ_m est l'ensemble vide.

• Si $m = 0$: Γ_m est le point G.

• Si $m > 0$: Γ_m est le cercle de centre G et de rayon $r = \sqrt{\frac{m}{2}}$

b) D'après les résultats précédents, pour $m = 10$, l'ensemble est un cercle de centre G et de rayon $r = \sqrt{\frac{m}{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}$.

et comme : $GC^2 = 5 \Leftrightarrow GC = \sqrt{5}$, alors ce cercle passe par C.

Donc Γ_{10} est le cercle de centre G passant par C.

• pour construction voir figure précédente