N° 1003 ; Nom : Med / Ahmed Mahmoud / Taghi

Bac 2012 S.C   4eme ecriture

Exo 2 : $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$; $D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$

1.a) les limites

* $\lim_{0^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{0^+} f(x) = -\infty}$
* $\lim_{1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{1^-} f(x) = -\infty}$
* $\lim_{1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{1^+} f(x) = +\infty}$
* $\lim_{+\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{+\infty} f(x) = 0}$

*interpretation $x=0$ A.V au voisinage de $-\infty$

$x=1$ A.V et $y=0$ A.H au voisinage de $+\infty$

b) T.V de f : $f'(x) = \frac{0\times(x\ln x) - 1\times(\ln x+1)}{(x\ln x)^2}$

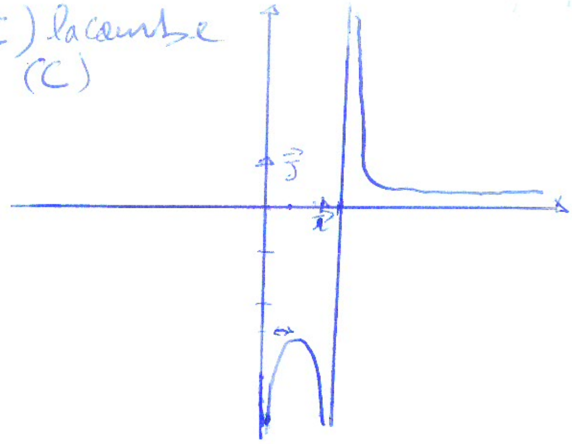
$\Rightarrow f'(x) = \frac{-(\ln x+1)}{(x\ln x)^2}$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(\ln x+1)$ donc $f'(x)=0$

$\Rightarrow \ln x+1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{e}}$

donc $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}} = -e$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow$	$-e$	$\searrow -\infty$		$+\infty \searrow$	0

c) la courbe (C)



2) $\forall n \geq 2$ on pose

$$U_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} - \ln(\ln n) = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \dots + \frac{1}{n\ln n} - \ln(\ln n)$$

a) Montrons que $\forall n \geq 2$

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n\ln n}$$

on pose $n \leq t \leq n+1$

$\Rightarrow \ln(n) \leq \ln(t) \leq \ln(n+1)$

$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq f(t) \leq \frac{1}{n\ln n}$

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{n\ln n}$$

$$\left[\frac{t}{(n+1)\ln(n+1)}\right]_n^{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \left[\frac{t}{n\ln n}\right]_n^{n+1}$$

$$\frac{n+1-n}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \frac{n+1-n}{n\ln n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n\ln n}}$$

b) $\forall n \geq 2 \quad U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+2)} - \int_n^{n+1} f(t)\,dt$

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k\ln k} - \ln\ln(n+1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\ln k} + \ln(\ln n)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \left[\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq 0}$$

donc U_n est decroissante ↘

c) Montrons que pour tout $n \geq 2$

$$U_{n+1} - U_n \geq f(n+1) - f(n)$$

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n\ln n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \int_n^{n+1} f(t)\,dt \geq \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \frac{1}{n\ln n}$$

$$\Rightarrow \boxed{U_{n+1} - U_n \geq f(n+1) - f(n)}$$

on a $\quad U_n - U_{n-1} \geq f(n) - f(n-1)$

$\oplus \; \ldots\ldots$

$\oplus \; \ldots\ldots$

$$U_3 - U_2 \geq f(3) - f(2)$$

$$U_{n+1} - U_2 \geq f(n+1) - f(2)$$

$$U_n + \cancel{\frac{1}{2\ln 2}} + \ln(\ln 2) \geq \frac{1}{n\ln n} - \cancel{\frac{1}{2\ln 2}}$$

$$U_n + \ln(\ln 2) \geq \frac{1}{n\ln n} \geq 0$$

$$\boxed{U_n \geq -\ln(\ln 2)}$$

d) Comme U_n est decroissante et minoreé donc elle est convergente

$$-\ln(\ln 2) \leq U_n \leq U_2$$

$$-\ln(\ln 2) \leq \lim_{n \to +\infty} U_n \leq \frac{1}{2\ln 2} - \ln(\ln 2)$$

$$\boxed{-\ln(\ln 2) \leq l \leq \frac{1}{2\ln 2} - \ln(\ln 2)}$$

FIN