Nom : Marieme Dede chemra

Gr : 2

EX5 : Bac 2013. SC

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

1) a) vérification

$$-1 + \frac{2e^x}{e^x+1} = \frac{-e^x - 1 + 2e^x}{e^x+1}$$

$$= \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = f(x)$$

et $1 - \frac{2}{e^x+1} = \frac{e^x + 1 - 2}{e^x+1}$

$$= \frac{e^x - 1}{e^x+1} = f(x)$$

b) * $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} -1 + \frac{2e^x}{e^x+1}$

$$= -1 + \frac{2\times 0}{0+1} = -1$$

• interprétation graphique :

La droite d'équation $y = -1$ est un asymptote horizontal de $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

* $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} 1 - \frac{2}{e^x+1}$

$$= 1 - \frac{2}{+\infty} = 1 - 0 = 1$$

$y = 1$ AH au voisinage de $(+\infty)$

2) a) $f'(x) = 1 - \frac{2}{e^x+1} \Rightarrow f'(x) =$

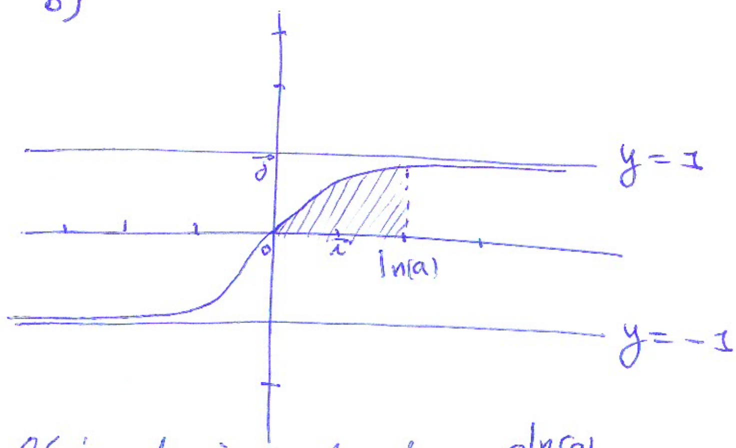
$$f'(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donc f est croissante.

T. V de f

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow 1$

b)



c) l'aire demandée est $\mathcal{A} = \int_0^{\ln(a)} f(x)\,dx$

$$= \int_0^{\ln a} \left(-1 + \frac{2e^x}{1+e^x}\right)dx = \left[-x + 2\ln(1+e^x)\right]_0^{\ln a}$$

$$= -\ln(a) + 2\ln(1+a) - 2\ln(2)$$

$$= -\cancel{2\ln}\, 2\ln\sqrt{a} + 2\ln(1+a) - 2\ln(2)$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 2\left(\ln\left(\frac{1+a}{2\sqrt{a}}\right)\right)}$$

3) a) $I_1 = \int_0^{\ln(a)} f(t)\,dt = \boxed{2\ln\left(\frac{1+a}{2\sqrt{a}}\right)}$

b) $1 - 2f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(1+e^x)^2}$

$$= \frac{1 + e^{2x} + 2e^x - 4e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1 + e^{2x} - 2e^x}{(1+e^x)^2} =$$

$$= \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x+1)^2} = f^2(x).$$

$$\Rightarrow \boxed{1 - f'(x) = f^2(x)}$$

Nom : Marieme Dede Chemra

Gr : 2

Suite d'ex 3 Bac 2013 S.C

b) deduisons la valeur de I_2

$I_2 = \int_0^{\ln a} f^2(t)\,dt = \int_0^{\ln a} (1 - f'(t))\,dt$

$= [x - 2f'(t)]_0^{\ln a}$

$= \ln a - 2f'(\ln a) + \underbrace{2f(0)}_{0}$

$I_2 = \ln a - 2\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$

c) pour $0 \leq t \leq \ln(a) \Rightarrow$

$f(0) \leq f(t) \leq f(\ln a)$

$\Rightarrow 0 \leq f(t) \leq \frac{a-1}{a+1}$

$\Rightarrow 0 \leq f^n(t) \leq \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^{\ln a} f^n(t)\,dt \leq \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n \ln(a)$

$\Rightarrow \boxed{0 \leq I_n \leq \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n \cdot \ln a}$

on a $\lim_{+\infty} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n =$

$\lim_{+\infty} \frac{\cancel{a^n}\left(\left(1-\frac{1}{a}\right)^n\right)}{\cancel{a^n}\left(\left(1+\frac{1}{a}\right)^n\right)}$

$\Rightarrow \lim_{+\infty} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n = \lim_{+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{a}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^n}$

$= 0 \times \frac{1}{+\infty} = 0 \times 0 = 0$

car $0 < 1 - \frac{1}{a} < 1$ et $1 + \frac{1}{a} > 1$

donc selon Theoreme de Gendarme

$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

d) selon la linearite de l'integrale

$I_n - I_{n+2} = \int_0^{\ln a} (f^n(t) - f^{n+2}(t))\,dt$

$= \int_0^{\ln a} f^n(t)(1 - f^2(t))\,dt$

$= \int_0^{\ln a} 2f'(t) f^n(t)\,dt$

$= 2\left[\frac{f^{n+1}(t)}{n+1}\right]_0^{\ln a}$

$= \frac{2}{n+1}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{n+1}$ car

$f(\ln a) = \frac{a-1}{a+1}$

4) a) on a $I_n - I_{n-2} = \frac{2}{n+1}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{n+1}$

pour $k = n+1$

donc $\frac{1}{2}(I_{k-1} - I_{k+1}) = \frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k$

donc $S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k$

~~donc S_n~~ $= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(I_{k-1} - I_{k+1}) =$

$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_{k+1}$

alors $S_n(a) = \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2}(I_1 + I_2 + \dots I_{n-1})$

$- \frac{1}{2}(I_2 + I_3 + \dots + I_{n-1}) - \frac{1}{2}I_n - \frac{1}{2}I_{n+1}$

$= \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}(I_2 + \cancel{I_3} \dots + I_{n-1})$

$- \frac{1}{2}(I_2 + \cancel{I_3} + \dots I_{n-1}) - \frac{1}{2}I_n - \frac{1}{2}I_{n+1}$

$\Rightarrow S_n(a) = \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2}I_1 - \frac{1}{2}I_n - \frac{1}{2}I_{n+1}$

Nom : Marième Dede chemra

suite d'ex 5 Bac 2013 S.C

suite question 4) a) ...

par passage à la limite

lorsque $n \to +\infty$ on trouve :

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(a) = \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{2} I_1 - \frac{1}{2}\times 0 - \frac{1}{2}\times 0$

$= \frac{1}{2}\ln(a) + \ln\left(\frac{a+1}{2\sqrt{a}}\right)$

$= \ln\left(\cancel{\sqrt{a}} \times \frac{(a+1)}{2\cancel{\sqrt{a}}}\right) = \ln\left(\frac{a+1}{2}\right)$

b) $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{9}{11}\right)^k = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{10-1}{10+1}\right)^k$

$= S_n(10)$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(10)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{10+1}{2}\right) = \ln\left(\frac{11}{2}\right).$

Fin...

Nom : Marieme Dede chemra

Gr : 2 :

EX 3 : Bac 2013 S.C

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2-\ln x}$$

1)a) $\lim\limits_{0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} \frac{2\ln x}{x^2-\ln x}$

$= \lim\limits_{0^+} \frac{2\cancel{\ln x}}{\cancel{\ln x}(x^2\cdot\frac{1}{\ln x}-1)}$

$= \lim\limits_{0^+} \frac{2}{x^2\cdot\frac{1}{\ln x}-1} = \frac{2}{0\times 0-1} = -2$

$= f(0)$

donc f est continue en 0^+

b) $\lim\limits_{0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} =$

$\lim\limits_{0^+} \frac{\frac{2\ln x}{x^2-\ln x}+2}{x}$

$= \lim\limits_{0^+} \frac{\frac{\cancel{2\ln x}+2x^2-\cancel{2\ln x}}{x^2-\ln x}}{x}$

$= \lim\limits_{0^+} \frac{2x^2}{x^3-x\ln x} = \frac{2x}{x^2-\ln x}$

$= \lim\limits_{0^+} 2x \cdot \frac{1}{x^2-\ln x}$

$= 2\times 0 \cdot \frac{1}{0+\infty} = 0\times 0 = 0$

$= f'_d(0)$

donc f et dérivable à droite en zéro, est $\mathscr{C}_f$ admet au point $(0,-2)$ une demi-tangente horizontal.

c) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{2\ln x}{x^2-\ln x} =$

$\lim\limits_{+\infty} \frac{2\ln x}{x} \times \frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}}$

$= 2\times 0\times \frac{1}{1-0} = 0$

Interpretation graphique.

$y = 0$ AH au voisinage de $(+\infty)$.

2)a) $f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(x^2-\ln x)-2\ln x(2x-\frac{1}{x})}{(x^2-\ln x)^2}$

$= \frac{2x - \cancel{\frac{2\ln x}{x}} - 4x\ln x + \cancel{\frac{2\ln x}{x}}}{(x^2-\ln x)^2}$

$= \frac{2x-4x\ln x}{(x^2-\ln x)^2}$

$= \frac{2x(1-2\ln x)}{(x^2-\ln x)^2}$ donc ..

. si $f'(x) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \ln x \Rightarrow \sqrt{e} \leq x$

. si $f'(x) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{e} \geq x$

T.V de f.

x	0		$\sqrt{e}\simeq 1,6$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$\frac{2}{2e-1} \simeq 0,5$	$\searrow$	0

b) équation de la tangente de $\mathscr{C}_f$ en $x_0 = 1$

$T : y = f'(1)(x-1)+f(1)$

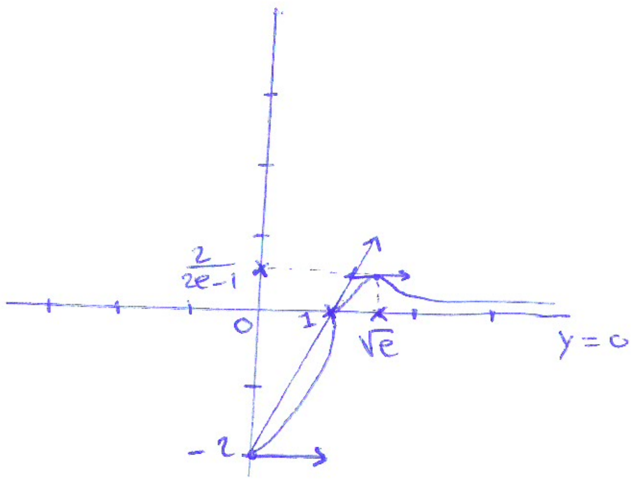
$y = 2(x-1)+0 \Rightarrow y = 2(x-1)$

Nom : Marième Dede Chemra

Gr : 2

Suite d'exo 3 : Bac 2013 S.C

c) courbe de f $(\mathcal{C}_f)$



3) a) La fonction $t \to t\,f(t)$ est continue sur $[1, +\infty[$ car elle est le produit des fonction continues donc elle admet une primitive H alors $F(x) = H(x) - H(1)$

donc F est dérivable (somme des fonction dérivables)

et $F'(x) = H'(x) = x\,f(x) = \frac{2x\ln x}{x^2 - \ln x}$

mais pour $x \geq 1$ on a $f(x) \geq 0$

$\Rightarrow x\,f(x) \geq 0$ alors $F'(x) = xf(x) \geq 0$

donc f est croissante.

b) pour $t \geq 1$:

$g(t) - \frac{2\ln(t)}{(t)}$

$= \frac{2t\ln(t)}{t^2 - \ln(t)} - \frac{2\ln(t)}{t}$

$= \frac{\cancel{2t^2\ln(t)} - \cancel{2t^2\ln(t)} + 2\ln^2(t)}{t(t^2 - \ln(t))}$

$= \frac{\ln(t)}{t} \times \frac{2\ln(t)}{t^2 - \ln(t)} = \frac{\ln(t)}{t} \times f(t) \geq 0$

car ln $\frac{\ln(t)}{t} \geq 0\ \forall t \geq 1$ et

$f(t) \geq 0$ donc $g(t) \geq \frac{2\ln(t)}{t}$

alors $t\,g(t) \geq 2\ln(t)$

$\Rightarrow F(x) = \int_1^x t\,g(t)\,dt \geq 2\int_1^x \ln(t)\,dt$

d'autre part

$(t\ln(t) - t)' = \ln(t) + \frac{(x)}{t} - 1$
$= \ln(t)$

donc $F(x) \geq 2\,[t\ln(t) - t]_1^x$

$\Rightarrow F(x) \geq 2x\ln(x) - 2x + 2$

et $\lim\limits_{+\infty} 2x\ln(x) - 2x + 2 =$

$\lim\limits_{+\infty} x(2\ln x - 2) + 2$

$= +\infty(+\infty - 2) + 2 = +\infty$

et selon les Theorème de comparaisons

$\lim\limits_{+\infty} F(x) = +\infty$

c) T.V de F

x	1	$+\infty$
$F'(x)$	+	
$F(x)$	0 ↗	$+\infty$