Lemeygueф Mint Mouhamed

Bac 2015

Session Normale

Exo 3 (exponentielles)

$f(x) = \frac{1}{e^x+1}$

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1$ ($e^x \to 0$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$ ($e^x \to +\infty$)

Interprétation graphique :

$\boxed{\lim\limits_{-\infty} f(x) = 1}$ $\Rightarrow$ $y = 1$ (A.H) au voisinage de $-\infty$

$\boxed{\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0}$ $\Rightarrow$ $y = 0$ (A.H) au voisinage de $+\infty$

b) $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 $\searrow$	0

- f est continue et strictement ($\searrow$) sur $\mathbb{R}$
- $f(\mathbb{R}) =]0, 1[$

alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J =]0, 1[$

Pour exprimer $f^{-1}(x)$, on pose : $y = f(x)$

on $y = \frac{1}{1+e^x} \Leftrightarrow y(1+e^x) = 1$

$\Leftrightarrow y + ye^x = 1$

$\Leftrightarrow ye^x = 1 - y \Leftrightarrow e^x = \frac{1-y}{y}$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$

D'où $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$

2) a) on $f(2a-x) + f(x) = 2b$ avec $(a, b) = (0, \frac{1}{2})$

$\Leftrightarrow f(-x) + f(x) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^x} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} + \frac{1}{1+e^x} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}} + \frac{1}{1+e^x} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x} = 1$

D'où $\Omega(0, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe (C) suite de l'exo 3

Lemeyguef Mint Mouhamed

Bac 2015

Session Normale

) les courbes (C) et (C') sont symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$, s'il se coupent en un point d'abscisse x, alors x vérifie $f(x) = x$, soit $f(x) - x = 0$

on pose : $V(x) = f(x) - x$

et $v'(x) = f'(x) - 1$

$\Rightarrow v'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} - 1 = -\left(1 + \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right)$

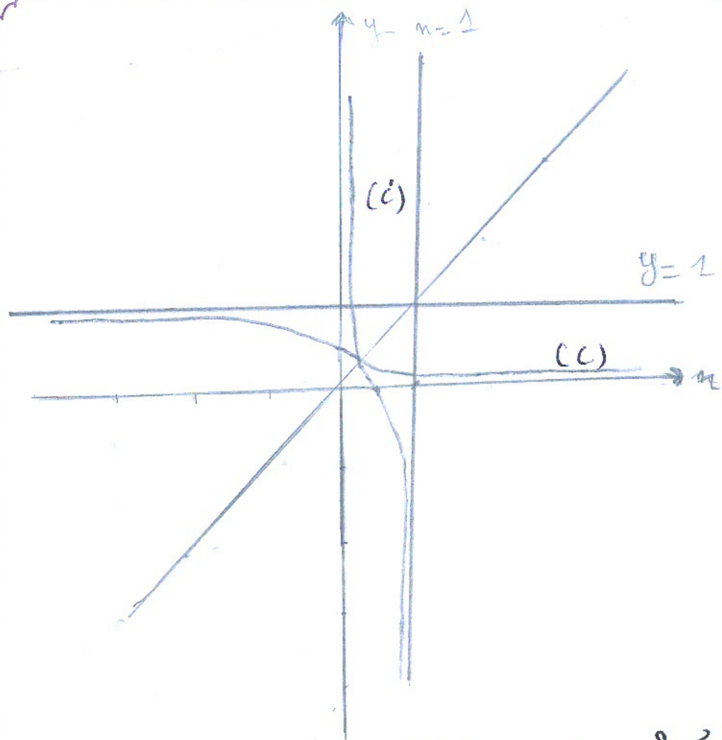
alors pour tout x de $\mathbb{R}$, $V'(x) < 0$

d'où $v'(x)$ est strictement ↘ sur $\mathbb{R}$

on a : $\begin{cases} V(0{,}4) = 1{,}3 \times 10^{-3} > 0 \\ V(0{,}5) = -0{,}12 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow V(0{,}4) \times V(0{,}5) < 0$ D'aprés le Th des valeurs intermédiaires, l'équation $V(x) = 0$ admet une solution α telle que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$ (V est continue sur $[0{,}4 ; 0{,}5]$ et change de signe)

d'aprés le Th de bijection reciproque (V est continue et strictement monotone) la solution α est



d) Par symétrie l'aire cherchée est égale au double de l'aire comprise entre (C), la droite $y = x$ et les droites $x = \alpha$ et $x = 0$

$A = 2\int_0^\alpha (f(x) - x)\,dx$

$A = 2\int_0^\alpha \frac{1}{e^x+1} - x)\,dx$

$A = 2\int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} - x\,dx$

$A = -2\int_0^\alpha \left(-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} + x\right)dx$

$A = -2\left[\ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{2}x^2\right]_0^\alpha$

$A = 2\left[-\ln(1+e^{-\alpha}) - \frac{1}{2}\alpha^2 + \ln 2\right]$

$A = -2\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{2}\right) - \alpha^2 = 2\ln\left(\frac{2e^\alpha}{1+e^\alpha}\right) - \alpha$

Suite d'exo 3

Lemeyguef Mint Mouhamed

Bac 2015

Session Normale

3) on a : $I_n = \int_0^\alpha f^n(t)\,dt$

a) $I_1 = \int_0^\alpha f(t)\,dt$

$I_1 = \int_0^\alpha \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt \Rightarrow I_1 = -\int_0^\alpha \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt$

$I_1 = \left[-\ln(1+e^{-t})\right]_0^\alpha$

$I_1 = -\ln(1+e^{-t}) + \ln 2$

$I_1 = -\ln\left(\frac{1+e^\alpha}{e^\alpha}\right) + \ln 2$

$I_1 = \ln\left(\frac{1}{1+e^\alpha}e^\alpha\right) + \ln 2$

$I_1 = \ln(\alpha e^\alpha) + \ln 2$

car $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{e^\alpha+1} = \alpha$

$I_1 = \ln(\alpha) + \ln e^\alpha + \ln 2$

$I_1 = \alpha + \ln(2\alpha)$

b) on a $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$

$f^2(x) - f(x) = \frac{1}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{1+e^x} \times \frac{1+e^x}{1+e^x}$

$= \frac{1}{(1+e^x)^2} - \frac{(1+e^x)}{(1+e^x)^2}$

$= \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} = f'(x)$

c) d'après b) en multipliant par $f^{n-1}(x)$ on obtient :

$f'(x) \times f^{n-1}(x) = f^{n+1}(x) - f^n(x)$

par intégration de 0 à α :

$\int_0^\alpha f'(x) f^{n-1}(x)\,dx = \int_0^\alpha f^{n+1}(x)\,dx - \int_0^\alpha f^n(x)\,dx$

$I_{n+1} - I_n = \left[\frac{1}{n} f^n(x)\right]_0^\alpha$

$\frac{1}{n}\left(f^n(\alpha) - f^n(0)\right) = I_{n+1} - I_n$

$\frac{1}{n}\left(\alpha^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = I_{n+1} - I_n$

$\Leftrightarrow I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$

d) on a $\alpha > 0$ et pour tout entier Naturel non nul n, f^n est continue et positive sur $[0, \alpha]$, Alors $\int_0^\alpha f^n(t)\,dt \geq 0$

D'ou $I_n \geq 0$, donc I_n est positive.

D'autre part : $0 < \alpha < 0,5$

$0 < \alpha^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \alpha^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\alpha^n - \frac{1}{2^n} < 0 \Rightarrow I_{n+1} - I_n < 0$

D'ou (I_n) est décroissante.

Lemeyguef Mint Mouhamed

Bac 2015

Session Normale

on en déduit que la suite (I_n) est convergente, car décroissante et minorée.

1.B : Toute suite positive est minorée par 0, et toute suite décroissante est majorée par son 1^er terme.

) a) on sait que f est décroissante sur $\mathbb{R}$, Donc si $0 \leq t \leq \alpha$

on a : $f(\alpha) \leq f(t) \leq f(0)$

$$\Leftrightarrow \alpha \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \quad \text{et } \alpha > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < \alpha^n \leq f^n(t) \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\alpha \alpha^n dt \leq \int_0^\alpha f^n(t)\, dt \leq \int_0^\alpha \frac{1}{2^n} dt$$

$$\Leftrightarrow \alpha^n [t]_0^\alpha \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}[t]_0^\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha^n(\alpha - 0) \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}(\alpha - 0)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$$

comme $0 < \alpha < 1$ on a : $\lim\limits_{\to +\infty} \alpha^{n+1} = 0$

et $\lim\limits_{\to +\infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0$ Alors d'aprés la th de gendarme $\boxed{\lim\limits_{\to +\infty} I_n = 0}$

b) pour tout $n > 0$:

$$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$$

Donc :

pour $n = 1 \Rightarrow I_2 - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$

$n = 2 \Rightarrow \cancel{I_3} - \cancel{I_2} = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right)$

$n = 3 \Rightarrow \cancel{I_4} - I_3 = \frac{1}{3}\left(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}\right)$

" " " "

" " " "

$n = n-1 \Rightarrow I_n - \cancel{I_{n-1}} = \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

Par addition membre à membre et simplification on obtient :

$$I_n - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3}\left(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}\right) + \cdots + \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$I_n = I_1 + \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{K}\left(\alpha^K - \frac{1}{2^K}\right)$$

on peut écrire $I_n - (\alpha + \ln(2\alpha)) = \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{K}\left(\alpha^K - \frac{1}{2^K}\right)$.

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{K}\left(\alpha^K - \frac{1}{2^K}\right) = \lim_{\to +\infty} I_n - \lim_{\to +\infty}(\alpha + \ln(2\alpha))$$

comme $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$ et $\lim\limits_{\to +\infty}(\alpha + \ln(2\alpha)) = \alpha + \ln(2\alpha)$ (car independant de n)

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{K}\left(\alpha^K - \frac{1}{2^K}\right) = -(\alpha + \ln(2\alpha)).$$

Lemeyguef Mint Mouhamed

Bac 2015

Session Normale

Exo 4 {logarithmes}

)a) on doit factorise le dénominateur par x : $x^3 - 4x^2 + 5x$
$$= x(x^2 - 4x + 5)$$

t le numérateur par le tableau d'Horner :

	3	-12	19	-10
1		3	-9	10
	3	-9	10	0

lors $3x^3 - 12x^2 + 19x - 10$
$$= (x-1)(3x^2 - 9x + 10)$$

onc $g(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2 - 9x + 10)}{x(x^2 - 4x + 5)}$

) le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$ est celui de $\dfrac{x-1}{x}$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	$-$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$+$
$\frac{x-1}{x}$	$+$	‖	$-$		$+$
$g(x)$	$+$	‖	$-$		$+$

2)a) $\lim\limits_{x \to 0} (3x - 3) = -3$

et $\lim\limits_{x \to 0} \ln\left(\dfrac{x^2 - 4x + 5}{x^2}\right) = +\infty$

Alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 0$ (A.V)

*b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \ln\left(\dfrac{x^2 - 4x + 5}{x^2}\right) = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{\to \pm\infty} (3x - 3) = \pm\infty$

D'où $\lim\limits_{\to +\infty} f(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{\to -\infty} f(x) = -\infty$

c) D'après a) la courbe (C) admet une A.V d'equation $x = 0$, De plus

$\lim\limits_{\to \pm\infty} (f(x) - (3x - 3)) = \lim\limits_{\to \pm\infty} \ln\left(\dfrac{x^2 - 4x + 5}{x^2}\right) = 0$

donc la courbe (C) admet une A.O D d'équation $y = 3x - 3$

Pour étudier la P.R de (C) et (D) on étudie le signe de

$d(x) = f(x) - y = f(x) - (3x - 3)$

$d(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - 4x + 5}{x^2}\right)$

on rappelle que le signe de $\ln t$ est celui de $t - 1$ pour tout $t > 0$

alors le signe de $d(x)$ est celui de :

$\dfrac{x^2 - 4x + 5}{} - 1$

Suite d'exo 4

Lemeyguef Mint Mouhamed

Bac 2015

Session Normale

Par réduction au même dénominateur

$$\frac{x^2-4x+5}{x^2}-1=\frac{\cancel{x^2}-4x+5-\cancel{x^2}}{x^2}=\frac{-4x+5}{x^2}$$

Donc le signe de $d(x)$ est celui de $-4x+5$, car $x^2>0$

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{5}$	$+\infty$
$-4x+5$	$+$	$+$	$-$	
$d(x)$	$+$	$+$	$-$	
P.R	C/D	C/D	D/C	

Pour $x=\frac{5}{4}$ on a $y=3\times\frac{5}{4}-3=\frac{3}{4}$

alors l'asymptote D coupe la courbe

c) au point $\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$

a) on peut écrire $f(x)=3x-3+\ln(x^2-4x+5)-\ln(x^2)$

$\Rightarrow f(x)=3x-3+\ln(x^2-4x+5)-2\ln x$

Donc $f'(x)=3+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{2}{x}$

$$f'(x)=3+\frac{(2x-4)x-2(x^2-4x+5)}{x(x^2-4x+5)}$$

$$f'(x)=\frac{3(x^3-4x^2+5x)+\cancel{2x^2}-4x-\cancel{2x^2}+8x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

$$f'(x)=\frac{3x^3-12x^2+15x+4x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{3x^3-12x^2+19x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=g(x)$$

T.V :

le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖ $-$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖ $+\infty \searrow$	$\ln 2 \nearrow +\infty$	

b) Sur l'intervalle $]0,+\infty[$ on a : $f(x)\geq \ln 2>0$, Donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution dans cet intervalle.

• Sur l'intervalle $]-\infty,0[$ la restriction de f est continue, strictement monotone et change de signe car $0\in f(]-\infty,0[)=]-\infty,+\infty[$. Donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans cet intervalle.

Alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}^*$.

suite d'exo 4

Lemeyguef Mint Mouhamed

Bac 2015

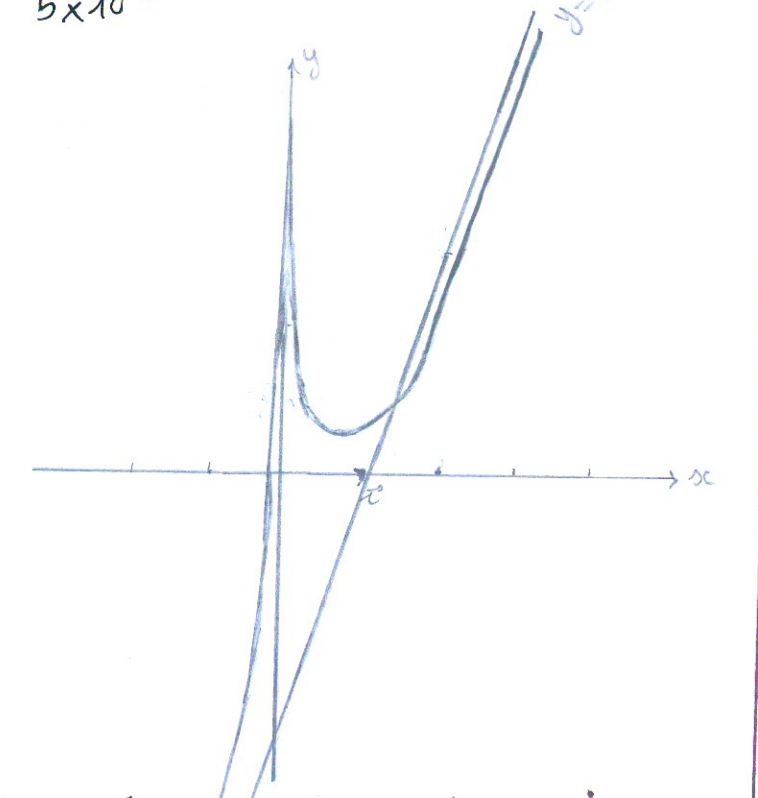
Session Normale

Pour encadrer α :

$$\left.\begin{cases} f(-1) = -6 + \ln 10 < 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty \end{cases}\right\} \Rightarrow -1 < \alpha < 0$$

$$\left.\begin{matrix} f(-0,5) = -4,5 + \ln 29 < 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow -0,5 < \alpha < 0$$

C'est un encadrement de α d'amplitude 5×10^{-1}



) a) $2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2}\right)$

$= 2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+x^2-4x+4}\right)$

$= 2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{x^2-4x+5}\right)$

$= 2\left(1 + \frac{2x-4-1}{x^2-4x+5}\right)$

$= 2\left(\frac{x^2-4x+\cancel{5}+2x-\cancel{5}}{x^2-4x+5}\right)$

$= 2\left(\frac{x^2-2x}{x^2-4x+5}\right)$

$= \frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}$

$\Leftrightarrow \frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5} = 2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2}\right)$

b) $A = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx$

$= \left[\ln(x^2-4x+5)\right]_3^{2+\sqrt{3}}$

$= \left[\ln\left((2+\sqrt{3})^2 - 4(2+\sqrt{3}) + 5\right)\right] - \left[\ln(3)^2 - 4(3) + 5\right]$

$= \left[\ln\left(4 + \cancel{4\sqrt{3}} + 3 - 8 - \cancel{4\sqrt{3}} + 5\right)\right] - \left[\ln 2\right]$

$= \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$

donc $\boxed{A = \ln 2}$

c) En posant $x = 2 + \tan t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

on a :

$$\begin{cases} x = 3 \Leftrightarrow 2 + \tan t = 3 \Leftrightarrow \tan t = 1 \Leftrightarrow \boxed{t = \frac{\pi}{4}} \\ x = 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow 2 + \tan t = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan t = \sqrt{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \boxed{t = \frac{\pi}{3}}$

Lemeyguef Mint Mouhamed

Bac 2015

Session Normale

$x = 2 + \tan t \Leftrightarrow dx = (1+\tan^2 t)\, dt$

$x = 2 + \tan t \Leftrightarrow 1 + (x-2)^2 = 1 + \tan^2 t$

Pour calculer $B = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\, dx$

on remplace avec le changement de variable :

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\cancel{\tan^2 t}} (1+\cancel{\tan^2 t})\, dt$$

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt$$

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2} = [t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

En fin $\boxed{B = \frac{\pi}{12}}$

4) Pour calculer $J = \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2-4x+5)\, dx$ à l'aide d'une intégration par parties on pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x^2-4x+5) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+5} \\ v(x) = x \end{cases}$$

D'ou $J = \left[x \ln(x^2-4x+5)\right]_3^{2+\sqrt{3}} - \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}\, dx$

on remplace dans la 1er partie par les bornes, et dans l'intégrale par l'expression trouvée en 4)a) :

$$J = (2+\sqrt{3}) \ln\left((2+\sqrt{3})^2 - 4(2+\sqrt{3}) + 5\right) - 3 \ln\left((3)^2 - 4(3) + 5\right) - \int_3^{2+\sqrt{3}} 2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2}\right) dx$$

$$J = (2+\sqrt{3}) \ln 4 - 3 \ln 2 - 2\left(\int_3^{2+\sqrt{3}} dx + \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\, dx - \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}\, dx\right)$$

D'après 4)b) et 4)c) on obtient :

$$J = (2+\sqrt{3}) \ln 2^2 - 3 \ln 2 - 2\left([x]_3^{2+\sqrt{3}} + A - B\right)$$

$$J = 2(2+\sqrt{3}) \ln 2 - 3 \ln 2 - 2\left(2+\sqrt{3} - 3 + \ln 2 - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$J = (4-3+2\sqrt{3}) \ln 2 - 2\left(-1+\sqrt{3} + \ln 2 - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$J = (1+2\sqrt{3}) \ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} - 2\ln 2 + \frac{2\pi}{12}$$

$$\boxed{J = (-1+2\sqrt{3}) \ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}}$$

Suite d'exo 4

Lemeyguef Mint Mouhamed

Bac 2015

Session Normale

Pour calculer $K = 2\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln x \, dx$

à l'aide d'une intégration par parties, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

D'où $K = 2\left(\left[x \ln x\right]_3^{2+\sqrt{3}} - \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{\cancel{x}} \cancel{x} \, dx\right)$

$K = 2\left(\left[x \ln x\right]_3^{2+\sqrt{3}} - \int_3^{2+\sqrt{3}} dx\right)$

$K = 2\left(\left[x \ln x\right]_3^{2+\sqrt{3}} - \left[x\right]_3^{2+\sqrt{3}}\right)$

$K = 2\left(\left[x \ln x - x\right]_3^{2+\sqrt{3}}\right)$

$= 2\left((2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3}) - 3\ln 3 + 3\right)$

$K = 2\left((2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 1 - \sqrt{3} - 3\ln 3\right)$

$$\boxed{K = (4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 2 - 2\sqrt{3} - 6\ln 3}$$

Pour calculer l'aire S du domaine delimité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives :

$y = 3x - 3$, $x = 3$ et $x = 2 + \sqrt{3}$

on remarque que pour $x \geq 3$ la droite $y = 3x - 3$ est au dessus de la courbe.

Alors $S = \int_3^{2+\sqrt{3}} (y - f(x))\, dx = \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right) dx$

$S = -\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2 - 4x + 5)\, dx + \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x)^2 \, dx$

Donc $S = -J + K$

$S = -\left((-1+2\sqrt{3})\ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right) + \left((4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 2 - 2\sqrt{3} - 6\ln 3\right)$

$S = (1 - 2\sqrt{3})\ln 2 \cancel{-2} + \cancel{2\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} + (4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + \cancel{2} - \cancel{2\sqrt{3}} - 6\ln 3$

$S = (1 - 2\sqrt{3})\ln 2 + (4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) - 6\ln 3 - \frac{\pi}{6}$

$$\boxed{S \simeq 1{,}0066 \text{ u.a}}$$