Exo 4

Bac 2011

S.c

Nom : Jamila / Hamid

classe : 7c

N° : 1549

Bac 2017 Sc

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par

$f(x) = x.\ln(x+1)$

1) a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{(-1)^+} x.\ln(x+1)$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} x = -1 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} \ln(x+1) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \end{cases}$

D'où $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = (-1)(-\infty) = +\infty$

Interprétation graphique : La droite d'équation $x=-1$ est une asymptote verticale.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty \end{cases}$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x\ln(x+1)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$

D'où $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Interprétation graphique : la courbe de la fonction admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $+\infty$

b) calcul de dérivée

$f'(x) = 1.\ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$

Donc $f'(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$

* si $x \in]-1;0] \Rightarrow x+1 \leq 1$

Donc $\ln(x+1) \leq 0$

et $x+1 > 0 \Rightarrow \dfrac{x}{x+1} \leq 0$

D'où $f'(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1} \leq 0$

D'où $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x)$ est décroissante.

* si $x \in [0;+\infty[$ alors :

$1+x \geq 1 \Rightarrow \ln(1+x) \geq 0$ et

$\dfrac{x}{1+x} \geq 0$

d'où $f'(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1} \geq 0$

D'où $f(x)$ est croissante

c) le TV

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

2) a) Déterminer les réels a, b, et c

tq $\frac{x^2}{x+1} = ax+b+\frac{c}{x+1}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$

Par identification

$\begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \Rightarrow b=-1 \\ b+c=0 \Rightarrow c=1 \end{cases}$

D'où $\frac{x^2}{x+1} = x-1+\frac{1}{x+1}$

b) $A = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\ln(x+1)\ln$

on pose

$\begin{cases} u' = x \\ v = \ln(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{x^2}{2} \\ v' = \frac{1}{x+1} \end{cases}$

D'où

$A = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)}\,dx$

$A = \left[\frac{1^2}{2}\ln(1+1) - \frac{0^2}{2}\ln(0+1)\right] - \int_0^1 (x-1)+\frac{1}{x+1})$

$A = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$

$A = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\ln(x+1)\right]_0^1$

$A = \cancel{\frac{\ln(2)}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) - \frac{1}{2}\cancel{\ln(2)}$

$\boxed{A = -\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ \text{u a}}$

3) $\forall n \geq 1$ on pose $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$

a) puisque la fonction $x \to x^n\ln(x+1)$ est continue sur l'intervalle $[0;1]$ alors $\int_0^1 x^n\ln(1+x)\,dx$ existe bien d'où la suite (u_n) est bien définie

b) calcul de u_1 :

$u_1 = \int_0^1 x^n\ln(x+1)\,dx = \int_0^1 x\ln(x+1)\,dx$

D'où $u_1 = A \Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{1}{4}}$

Donc u_1 est l'aire calculée dans la question 2) b)

c) Mq (u_n) est décroissante

on calcul $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)\,dx - \int_0^1 x^n\ln(x+1)\,dx$

$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 (x^{n+1}\ln(x+1) - x^n\ln(x+1))\,dx$

$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^n\ln(x+1)\cdot(x-1)\,dx.$

on pour $x \in [0;1]$

$x^n\ln(x+1) \geq 0$ et $(x-1) \leq 0$

d'où $(x^n\ln(x+1))\cdot(x-1) \leq 0$

D'où : $u_{n+1} - u_n \leq 0$

D'où la suite (u_n) est décroissante

or $x^n \ln(x+1) \geq 0$

$\Rightarrow (u_n) \geq 0$ donc la suite (u_n) est minorée par 0 et décroissante

d'où (u_n) est convergente.

d) on a : pour tout $n \geq 0$

Si $0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq x+1 \leq 2$

$\Rightarrow \ln(1) \leq \ln(x+1) \leq \ln(2)$

$\Rightarrow 0 \leq \ln(x+1) \leq \ln(2)$

$\Rightarrow 0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln(2)$

on intègre :

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1)\, dx \leq \int_0^1 x^n \cdot \ln(2)$

$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \ln(2) \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \ln(2) \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)$

$0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$

D'où :

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1}$

$\Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq 0$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

4) pour tout entier $n \geq 1$ on pose

$v_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\, dx$

a) on a $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\, dx$

on pose $\begin{cases} u' = x^n \\ v = \ln(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ v' = \frac{1}{x+1} \end{cases}$

D'où

$u_n = \left[\frac{x^n}{n+1} \ln(n+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x+1}\, dx$

$\Rightarrow u_n = \frac{1}{n+1} \ln(1+1) - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx$

$\Rightarrow u_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\, dx$

D'où $u_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1} v_n$

b) Si $0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq 1+x \leq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{x^{n+1}}{2} \leq \frac{x^{n+1}}{x+1} \leq x^{n+1}$

on intègre :

$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2}\, dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\, dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 \leq v_n \leq \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$

D'où $\frac{1}{2(n+2)} \leq v_n \leq \frac{1}{n+2}$

* la limite de v_n :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2(n+2)} \leq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+2}$

$\Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n \leq 0$

D'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

c)

on a $\sum_{i=0}^{n} (-x)^i = 1 - x + (-x)^2 + \dots + (-x)^n$

c'est la somme d'une suite geometrique

du raison $q = -x$

d'où $\sum_{i=0}^{n} (-x)^i = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}$

$= \frac{1-(-1)^{n+1}(x)^{n+1}}{1+x}$

d'où $\sum_{i=0}^{n} (-x)^i - \frac{1}{1+x} = \frac{-(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} (-x)^i - \frac{1}{1+n} = \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{1+x}$

D'où

$(-1)^n \left[\sum_{i=0}^{n} (-x)^i - \frac{1}{x+1}\right] = \frac{x^{n+1}}{1+x}$

D'où :

$U_n = (-1)^n \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n} (-x)^i - \frac{1}{x+1}\right) dx$

$U_n = (-1)^n \int_0^1 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n$

$- \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$

$\Rightarrow U_n = (-1)^n \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right.$

$\left. + (x)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \left[\ln(x+1)\right]_0^1$

$\Rightarrow U_n = (-1)^n \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dots + + (-1)^n \frac{1}{n+1}\right.$

$\left. - \ln\right]$

d) on a d'après (b) $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

D'où $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots +\right.$

$\left.(-1)^n \frac{1}{n+1} - \ln(2)\right) =$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1}\right)$

$= \ln(2)$

Bac 2015

Exos S.C

Nom : Jamila / Hamid

classe : 7C

N° : 1549

Bac 2015 SC

Exercice 5

Soit $f(x) = x\ln(x+1)$ de la courbe $\mathcal{C}$.

1) a) Justification :

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -1 \times (-\infty) = +\infty \Rightarrow x = -1$ AV

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$

b) calculons $f'(x)$

$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$

justification

$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0$

$x \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$

x		0	$+\infty$
$\ln(x+1)$	$-$	0	$+$
$\frac{x}{x+1}$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$		$+$

c) Dressons le TV de f

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	‖ $+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

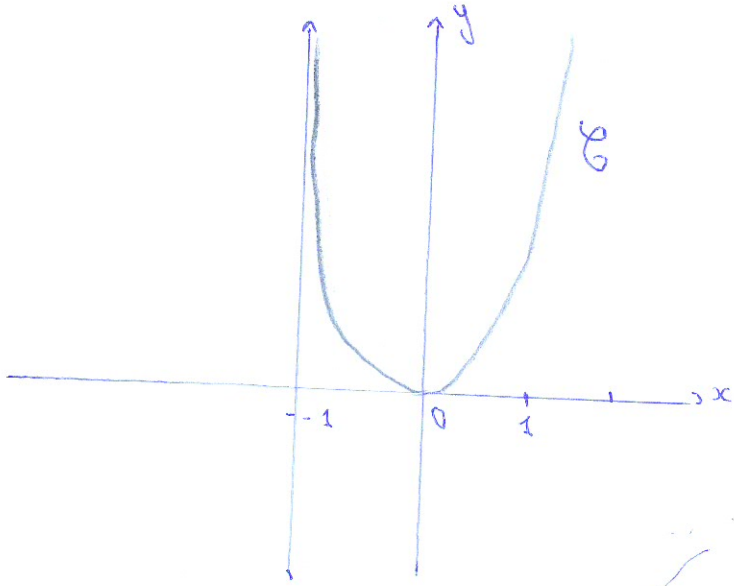
2) a) Tracé de $\mathcal{C}$ de f

Branches infinies

$\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{x\ln(x+1)}{x}$

$= \lim\limits_{+\infty} \ln(x+1) = +\infty$

$\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy)



b) calculons $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$

$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx = \int_0^1 (x - 1 + \frac{1}{x+1})dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x)\right]_0^1$

$= \frac{1}{2} - 1 + \ln 2$

$= -\frac{1}{2} + \ln 2$

c) $\mathcal{A} = \int_0^1 \underset{u'}{x}\,\underset{v}{\ln(1+x)}\,dx$

$u'(x) = x \longrightarrow u(x) = \frac{1}{2}x^2$

$v(x) = \ln(1+x) \longrightarrow v'(x) = \frac{1}{1+x}$

$\mathcal{A} = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\ln 2\right) = \frac{1}{4}$ uA

3) $\forall n \geq 1 \quad u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx$

a) Montrons que (u_n) est définie

$\forall t \in [0;1]\ t \longrightarrow t^n \ln(1+t)$ est continue produit de 2 fonction continues

Justification $u_1 = \frac{1}{4}$

$u_1 = \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx = \mathcal{A} = \frac{1}{4}$

b) Montrons que $\forall n \geq 1 \quad 0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

on a : $0 \leq x \leq 1$

$1 \leq 1+x \leq 2$

$0 \leq \ln(1+x) \leq \ln 2$

$0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln 2$

$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx \ln 2 \int_0^1 x^n\,dx$

$0 \leq u_n \leq \ln 2 \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$

$0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

on en deduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

car $\lim\limits_{+\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$

4) Montrons que

$u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right]$

$u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx$

on pose $u'(x) = x^n \longrightarrow u(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$v = \ln(1+x) \longrightarrow v' = \frac{1}{1+x}$

$u_n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx.$

$u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$

or $(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx = \ln 2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$

$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx = (-1)^{n+1}\left[\ln 2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right]$

$u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right]$

5) $V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$

a) Montrons que

$\frac{1}{2(n+2)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \leq \frac{1}{n+2}$

$0 \leq x \leq 1$

$1 \leq 1+x \leq 2$

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$

$\frac{1}{2}x^{n+1} \leq \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}$

$\int_0^1 \frac{1}{2}x^{n+1}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \leq \int_0^1 x^{n+1}\,dx$

$\left[\frac{1}{2(n+2)}x^{n+2}\right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \leq \left[\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]$

$\frac{1}{2(n+2)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \leq \frac{1}{n+2}$

b) En deduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} V_n = \ln 2$

on remarque

$$V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$

$$V_n = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$$

Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \ln 2$$

c) Dedüisons $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (x+1) u_n$

on a : $0 \leq u_n \leq \dfrac{\ln 2}{n+1}$

$$u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left[\ln 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \right]$$

$$u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left[\ln 2 - V_n \right]$$

$$(n+1) u_n = \ln 2 - (-1)^{n+1} \left[\ln 2 - V_n \right]$$

$$\lim_{n \to +\infty} (n+1) u_n = \ln 2$$

Nombre Complexe

Exo 1 Bac 2014

S.N

Nom : Jamila / Hamid

classe : 7C

N° : 1549

Bac 2014 SN

Exercice 1

1) $P(2i) = (2i)^3 + (1-2i)(2i)^2 + (1-2i)(2i) - 2i$

$= -8i - 4(1-2i) + 2i(1-2i) - 2i$

$= -8i - 4 + 8i + 2i + 4 - 2i = 0$

$P(2i) = 0$

	1	$1-2i$	$1-2i$	$-2i$
$2i$	↓	$2i$	$2i$	$2i$
	1	1	1	0

$\forall z \in \mathbb{C}\ P(z) = (z-2i)(z^2+z+1)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2i)(z^2+z+1) = 0$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2+z+1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$

$z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$z'' = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{2i ; -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} ; \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$

$Im(2i) \geq Im\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \geq Im\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_0 = 2i$; $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

2) a) on a $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Soit $M(x,y)$

$M \in (BC) \Leftrightarrow \det(\vec{BM} ; \vec{BC}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1/2 & 0 \\ y-\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow 2x + 1 = 0$

b) $M \in (BC) \setminus \{B ; C\}$

$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + iy \ / y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

or : $z' = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{1}{(z+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$

D'où $z' = \frac{1}{(-\frac{1}{2} + iy + \frac{1}{2}) + \frac{3}{4}} = \frac{1}{(iy)^2 + \frac{3}{4}}$

Donc M' est sur l'axe des abscisse

3) a) $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z^2 + \bar{z}z + \bar{z}}$

$= \frac{\bar{z}}{(\bar{z}z)z + z\bar{z} + \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{\cancel{|z^2|} + \cancel{z|z|^2} + \bar{z}}$

Donc si $|z| = 1$ alors $|z^2| = 1$

d'où $f(z) = \frac{\bar{z}}{z + 1 + \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{1 + z + \bar{z}}$

b) si $z = e^{i\theta}$ alors $\bar{z} = e^{-i\theta}$

et $|z| = 1$

Donc : $f(z) = \frac{e^{-i\theta}}{1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$

$= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1 + 2\cos\theta}$

Bac 2011

S.N

EXO 3

Nom : Jamila / Hamid

classe : 7c ; N° 1549

Bac 2011 SN

Exo3

a Fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1)a) calculer la limites de F :

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = \frac{0-1}{0+1} = -1$

$\lim_{\to +\infty} F(x) = \lim_{+\infty} \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})}$

$= \lim_{+\infty} \frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$

Interprétation graphique : la courbe de F admet deux asymptotes horizontales l'une d'équation $y = -1$ au voisinage de $-\infty$ l'autre d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$

b- Démonstration que F est impaire et tableau de variation de F

$F = \mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in Df \; ; -x \in DF$

$F(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -F(x)$ alors F est une Fonction impaire.

Les variations de F

$F'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$

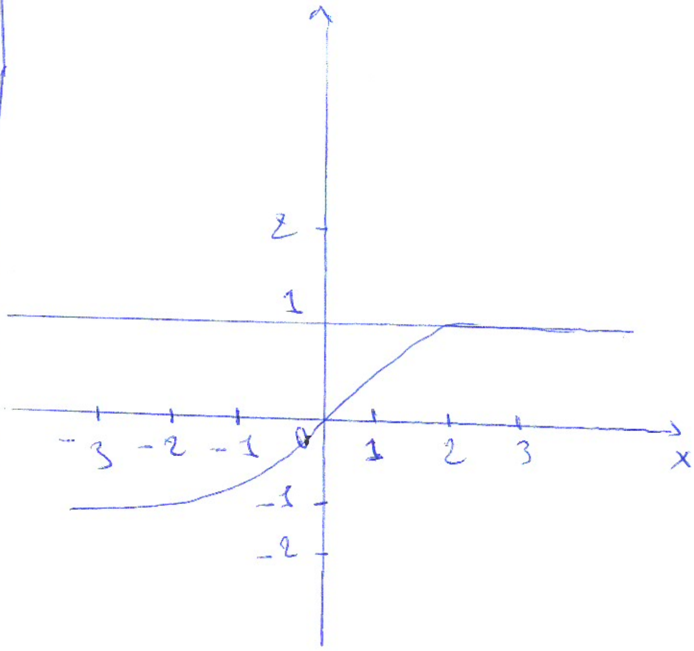
$F'(x) = \frac{(e^{2x}+2e^{-x}+e^{-2x}) - (e^{2x}-2e^{-x}e^x+e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^2}$

$F'(x) = \frac{4e^{x}e^x}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} \geq 0$

Alors F a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
$F(x)$	-1	$\nearrow$	1

c- la courbe (c) représentative de F dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm



d- calcul de A l'aire du domaine plan limité par la courbe (c) l'axe (ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 3$ on remarque que (c) est au dessus de l'axe (ox) sur $[0 ; \ln 3]$

$A = \int_0^{\ln 3} F(x)\,dx = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

$= \left[\ln(e^x + e^{-x})\right]_0^{\ln 3}$

$= \ln(3 + \frac{1}{3}) - \ln(1+1) = \frac{5}{3}$

2 / on définit la suite numérique (U_n) par $U_n = \int_0^{\ln 3} (F(t))^n dt$

a) calcul de U_1

$U_1 = \int_0^{\ln 3} F(t) dt = A = \ln\frac{5}{3}$

b) Montrons que pour tout entier naturelle n, on a : $0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \ln 3$:

• on sait que F est croissante sur l'intervalle $[0; \ln 3]$

Alors $\forall t \in [0; \ln 3]$ $F(0) \leq F(t) \leq F(\ln 3)$

$\Rightarrow 0 \leq (F(t))^n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$\Rightarrow \int_1^{\ln 3} 0\, dt \leq \int_0^{\ln 3} (F(t))^n dt \leq \int_0^{\ln 3} \left(\frac{4}{5}\right)^n dt$

$\Rightarrow 0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n [t]_0^{\ln 3}$

Donc $0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \ln 3$

comme $\lim_{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ alors d'après le theoremes $\lim_{+\infty} U_n = 0$

) verifions que pour tout $x \geq 0$; $1 - F'(x) = (F(x))^2$:

$1 - F'(x) = 1 - \frac{4e^{-x}e^x}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - 4\cancel{e^{-x}}e^x}{(e^x + e^{-x})^2}$

$= \frac{e^{2x} + 2e^{-x} + e^{-2x} - 4e^x\, e^x}{(e^x + e^{-x})^2}$

$= \frac{e^{2x} - 2e^{-x}e^x + e^{-2x}}{(e^x + ex)^2} = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = (F(x))^2$

Montrons que $\forall n \geq 0$ $U_{n+2} - U_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

$U_{n+2} - U_n = \int_0^{\ln 3} (F(t))^{n+2} dt - \int_0^{\ln 3} (F(t))^n dt$

$= \int_0^{\ln 3} [F(t)]^{n+2} dt - \int_0^{\ln 3} (F(t))^n dt$

$= \int_0^{\ln 3} [(F(t))^{n+2} - (F(t))^n] dt$

$= \int_0^{\ln 3} (F^n(t)\,[F(t)^2 - 1]) dt$

$= \int_0^{\ln 3} (F^n(t)\,[-F'(t)]) dt$

$= -\int_0^{\ln 3} (F'(t) \times F^n(t)) dt$

$= \left[-\frac{1}{n+1} F^{n+1}(t)\right]_0^{\ln 3}$

$= \frac{-1}{n+1} [(F(\ln 3))^{n+1} - F(0))^{n+1}]$

$= \frac{-1}{n+1} \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

Alors $\forall n \geq 0$ $U_{n+2} - U_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^n$

d) Pour tout entier naturel n strictement positive

• Montrons que $U_{2n} = \ln 3 - \sum_{P=1}^{n} \frac{1}{2P-1} \left(\frac{4}{5}\right)^{2P-1}$

on applique la relation démontrée dans la question 2) c) :

$\forall K \geq 2$ $U_K - U_{K-2} = \frac{-1}{K-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{K-}$

Pour les termes consécutifs d'indices paires de la suite (U_n) termes d'indices $K = 2P$ et $K - 2 = 2P - 2$ $P \in \mathbb{N}^*$

Donc $\forall P \geq 1$ $U_{2P} - U_{2P-2}$

$= \frac{-1}{2P-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2P-1}$

$$\begin{cases} P=1 & u_2-u_0=\dfrac{-1}{2\times1-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\times1-1} \\ P=2 & u_4-\cancel{u_2}=\dfrac{-1}{2\times2-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\times2-1} \\ P=3 & \cancel{u_6}-\cancel{u_4} \\ \dots & \dots = \dots \\ \dots & \dots = \dots \\ \dots & \dots = \dots \\ P=2n: & u_{2n}-\cancel{u_{2n-2}}=\dfrac{-1}{2n-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2n-1} \end{cases}$$

En additionnant et simplifiant membres à membres on obtient :

$$u_{2n}-u_0=\sum_{P=1}^{n}\frac{-1}{2P-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2P-1} \quad \text{or}$$

$$u_0=\int_0^{\ln 3}(F(t))^0\,dt=[t]_0^{\ln 3}=\ln 3$$

Donc $u_{2n}=\ln 3-\sum_{P=1}^{n}\frac{1}{2P-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2P-1}$

• Montrons de même que $u_{2n+1}=\ln\frac{5}{3}-\sum_{P=1}^{n}\frac{1}{2P}\left(\frac{4}{5}\right)^{2P}$:

on applique la relation démontrée dans la question 2)c) :

$\forall k\geq 2 \quad u_k-u_{k-2}=\frac{-1}{k-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$

Pour les termes successifs d'indices impaire de la suite (u_n) termes d'indices $k=2p+1$ et $k-2=2p-1$ $P\in\mathbb{N}^*$

donc $u_{2p+1}-u_{2p-1}=\frac{-1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p}$

$\forall p\geq 1$

Alors :

$$\begin{cases} P=1 & u_3-u_1=\dfrac{-1}{2\times1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\times1} \\ P=2 & u_5-\cancel{u_3}=\dfrac{-1}{2\times2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\times2} \\ P=3 & u_7-\cancel{u_5}=\dfrac{-1}{2\times3}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\times3} \\ \dots & \dots - \dots = \dots \\ \dots & \dots - \dots = \dots \\ \dots & \dots - \dots = \dots \\ P=2n: & u_{2n+1}-\cancel{u_{2n-1}}=\dfrac{-1}{2n}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2n} \end{cases}$$

En additionnant et simplifiant membre à membres on obtient :

$u_{2n+1}-u_1=\sum_{P=1}^{n}\frac{-1}{2P}\left(\frac{4}{5}\right)^{2P}$ or $u_1=\ln\frac{5}{3}$

Donc $u_{2n+1}=\ln\frac{5}{3}-\sum_{P=1}^{n}\frac{1}{2P}\left(\frac{4}{5}\right)^{2P}$

d) Pour tout entier naturel n strictement positif on pose :

$S_n=\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^4\dots+\frac{1}{2n}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n}=\sum_{P=1}^{2n}\frac{1}{P}\left(\frac{4}{5}\right)^n$

Calcul de limite la suite S_n

on a $S_n=\sum_{P=1}^{2n}\frac{1}{P}\left(\frac{4}{5}\right)^P=\sum_{P=1}^{n}\frac{1}{2P}\left(\frac{4}{5}\right)^{2P}+\sum_{P=1}^{n}\frac{1}{2P-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2P-1}$

or d'après la question 2)d) on a

$\sum_{P=1}^{n}\frac{1}{2P-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2P-1}=-u_{2n}+\ln 3$ et $\sum_{P=1}^{n}\frac{1}{2P}\left(\frac{4}{5}\right)^{2}=u_{n+1}+\ln\frac{5}{3}$

Alors $S=-u_{2n}+\cancel{\ln 3}-u_{2n+1}+\ln 5-\cancel{\ln 3}$

Et comme $\lim_{x\to+\infty}u_n=0$ alors

$\lim_{+\infty}S_n=\ln 5$