Bac

Fatimetou / Med Mahmoud

2013 S.N

Excercice 1:

(E): $25x - 9y = 5$

1.a) $25U + 9V = 1$

$25 = 9\times 2 + 7 \iff 7 = 25 - 9\times 2$

$9 = 7\times 1 + 2 \iff 2 = 9 - 7\times 1$

$7 = 2\times 3 + 1 \iff 1 = 7 - 2\times 3$

$2 = 1\times 2 + 0$

$1 = 7 - 2\times 3$

$1 = 7 - (9 - 7\times 1)\times 3$

$1 = 7(4) - 9(3)$

$1 = (25 - 9\times 2)\times 4 - 9(3)$

$1 = 25(4) + 9(-11)$

donc

$(U, V) = (4, -11)$

× Solution particulière de E

$25U + 9V = 1$

$25U - 9(-V) = 1$

$25(5U) - 9(-5V) = 5$

donc

$(4\times 5, -11\times(-5))$.

alors $(20, 55)$ est une solution particulière de E)

b) l'ensemble des solutions de (E)

$$\ominus\begin{cases} 25x - 9y = 5 \\ 25(20) - 9(55) = 5 \end{cases}$$

$$25(x-20) = 9(y-55)$$

$9 / 25(x-20)$ et $25 \wedge 9 = 1$

d'après gauss $9 / (x-20)$

$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{Z}$

$x - 20 = 9K \Rightarrow \boxed{x = 9K + 20}$

$25(9K) = 9(y-55)$

$\Rightarrow \boxed{y = 25K + 55}$

$S\{9K+20 ; 25K+55\}$

2) $d = PGCD(x, y)$

a) d / x et $d / y \Rightarrow d$ divise la combinaison linéaire $25x - 9y = 5$

$\Rightarrow d / 5$

d est diviseure positive de 5

les valeurs possible de d $\{1, 5\}$

2.

b) x et y sont premiers entre eux si $d = 1$ c'est à dire si x n'est pas divisible par 5, ce qui est le cas si K n'est pas multiple de 5

c) (x^2, y^2) ~~sont premiers entre eux~~

c) (x^2, y^2) est solution de (E) SSi :

$25x^2 - 9y^2 = 5$

$\Rightarrow (5x - 3y)(5x + 3y) = 5$

$\Rightarrow (5x - 3y) / 5 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 5x - 3y = 5 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 5x + 3y = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow 10x = 6$ –

$\Leftrightarrow x = 0{,}6$ impossible car $x \in \mathbb{Z}$

Exercice 2 :

$P(z) = z^3 - (9-i)z^2 + (28-5i)z - 32 + 4i$

1.a)

$P(4) = 4^3 - 9(4)^2 + i(4)^2 + 28(4) - 5i(4) - 32 + 4i$

$P(4) = 64 - 144 + 16i + 112 - 20i - 32 + 4i = 0$

$\boxed{P(4) = 0}$

$\ast$ $P(z) = (z-4)(z^2 - az + b)$

T. h

	1	$-9+i$	$28-5i$	$-32+4i$
4	$\downarrow$	4	$-20+4i$	$32-4i$
	1	$-5+i$	$8-i$	0

$a = -5+i$

$b = 8-i$

Alors

$\boxed{P(z) = (z-4)(z^2 + (-5+i)z + 8 - i)}$

b) $P(z) = 0$

$\Leftrightarrow$ $z = 4$ ou

$z^2 + (-5+i)z + 8 - i = 0$

$\Delta = (-5+i)^2 - 4(8-i)$
$= 25 - 10i - 1 - 32 + 4i$

$\Delta = -8 - 6i$

$\delta = \sqrt{\dfrac{-8 + \sqrt{8^2+6^2}}{2}} - i\sqrt{\dfrac{8 + \sqrt{8^2+6^2}}{2}}$

$\boxed{\delta = 1 - 3i}$

$z_1 = \dfrac{5-i+1-3i}{2\times 1} = \dfrac{6-4i}{2} = \boxed{3-2i}$

$z_2 = \dfrac{5-i-1+3i}{2\times 1} = \dfrac{4+2i}{2} = \boxed{2+i}$

$S\{4 ; 3-2i ; 2+i\}$

2) $z_A = 4$

$z_B = 2+i$

$z_C = 3-2i$

a) $z' = az + b$

$S_c(A) \longrightarrow B$

$S_c(C) \longrightarrow C$

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} z_B = a z_A + b & (1) \\ z_C = a z_C + b & (2) \end{cases}$

$(1) - (2) \Rightarrow z_B - z_C = a(z_A - z_C)$

$\Rightarrow$

$a = \dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{2+i-3+2i}{4-3+2i} = \dfrac{-1+3i}{1+2i}$

$a = \dfrac{(-1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{-1+2i+3i+6}{1-2i+2i+4}$

$a = \dfrac{5+5i}{5}$

$\Rightarrow \boxed{a = 1+i}$

dans ② $z_c = a z_c + b$

$(3-2i) = (1+i)(3-2i)+b$

$\Leftrightarrow b = 3-2i-(3-2i+3i+2)$

$b = 3-2i-5-i$

$\Longrightarrow \boxed{b = -2-3i}$

Alors $\boxed{z' = (1+i)z-(2+3i)}$

b) le rapport:

$\boxed{K = |1+i| = \sqrt{2}}$

Son angle :

$\boxed{\theta = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]}$

3) $\varphi(z) = z^2-(5-i)z+8-i$

a) $\varphi(z) = (x+iy)^2-(5-i)(x+iy)+8-i$

$\varphi(z) = x^2-y^2+2xiy-5x-5iy-xiy+8-i$

$\varphi(z) = x^2-y^2-5x-y+8+i(2xy-5y-x-1)$

$\Gamma = \{M \in P / \varphi(z)$ est imaginaire pur ou nul$\}$

$\Leftrightarrow R_e(z) = 0$

$\Rightarrow x^2-y^2-5x-y+8=0$

on a $\Omega(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$

$(x-\frac{5}{2})^2-(y+\frac{1}{2})^2-\frac{24}{4}+8=0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{5}{2})^2-(y+\frac{1}{2})^2 = 2$

$\Leftrightarrow \frac{-(x-\frac{5}{2})}{(\sqrt{2})^2}+\frac{(y+\frac{1}{2})}{(\sqrt{2})^2} = 1$

Dans la repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$

Γ a pour équation

$$-\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

D'où Γ est une hyperbole de centre Ω et de

b) les sommets sont :

$B(\frac{5}{2}, \sqrt{2}-\frac{1}{2})$, $B'(\frac{5}{2}; -\sqrt{2}-\frac{1}{2})$

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

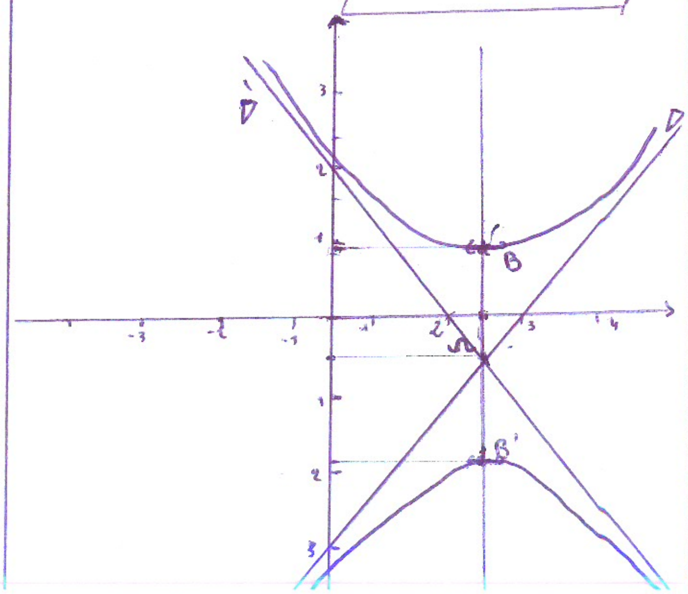
• Les asymptotes Δ et Δ' on pour équation dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

on a : $y+\frac{1}{2} = x-\frac{5}{2}$

$\Longrightarrow \boxed{\Delta : y = x-3}$

et $y+\frac{1}{2} = -x+\frac{5}{2}$

$\Longrightarrow \boxed{\Delta' : y = -x+2}$



Exercice 3:

$f(x) = (3-x)e^x$

1.a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3e^x - x e^x = 0 - 0 = 0$

$\therefore \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$ $y=0$ A.H au voisinage de $-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3e^x - x e^x = (3-x)e^x = (-\infty)(+\infty)$

$\therefore \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{(3-x)e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{x}\cdot e^x\right) = (-1)(+\infty)$

$\therefore \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$ donc $\mathcal{C}_f$ admet une B.P de direction (oy)

b) Le tableau de variation

$f'(x) = -e^x + (3-x)e^x$

$= -e^x + 3e^x - xe^x$

$f'(x) = (2-x)e^x$

donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x)e^x = 0$

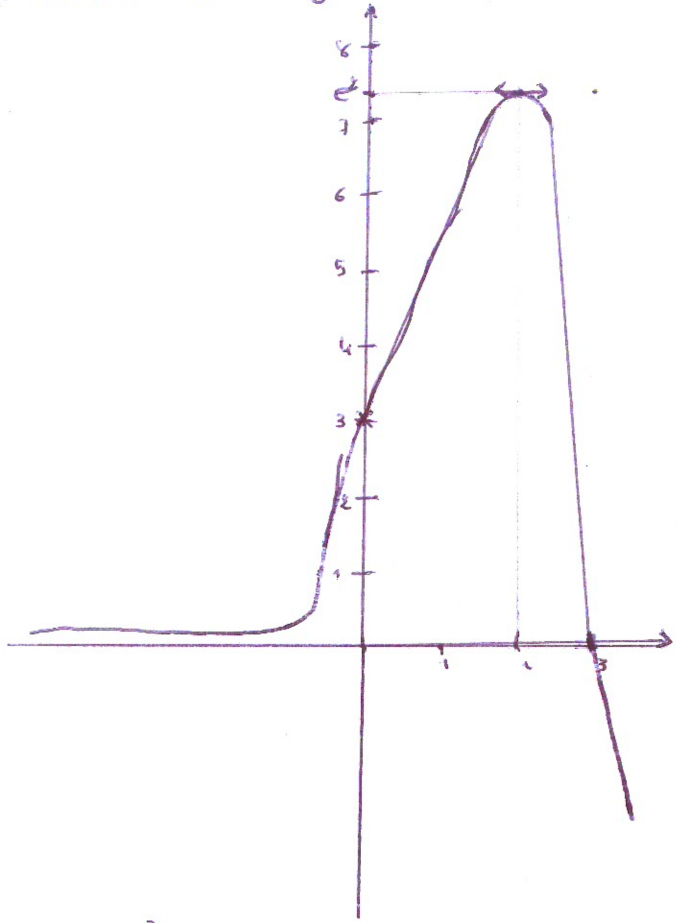
$-x = -2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

et

$f(2) = e^2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$-\infty$

c) $\mathcal{C} \cap (oy) \Rightarrow f(0) = 3$



d) $y' - y \overset{?}{=} -e^x$

$\Rightarrow f'(x) - f(x) = 2e^x - xe^x - 3e^x + xe^x$

$f'(x) - f(x) = -e^x$

donc $\boxed{y' - y = -e^x}$

• $A = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 (3-x)e^x\,dx$

$\begin{cases} U(x) = 3-x \\ V'(x) = e^x \end{cases}$ alors $\begin{cases} U'(x) = -1 \\ V(x) = e^x \end{cases}$

$A = [(3-x)e^x]_0^3 + \int_0^3 e^x\,dx$

$A = [(3-x)e^x + e^x]_0^3$

$A = ((3-3)e^3 + e^3) - ((3-0)e^0 + e^0)$

$= 0 + e^3 - 3 + 1$

$\boxed{A = e^3 - 4}$

2) $n \geq 1 \quad U_n = \frac{3^n}{n!}$

a) $n \geq 3$

on a $U_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \frac{\cancel{3^n} \times 3}{(n+1)n!} \times \frac{n!}{\cancel{3^n}}$$

$$= \frac{3 n!}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1}$$

or $n \geq 3 \Rightarrow n+1 \geq 4$

$\Leftrightarrow \frac{n+1}{3} \geq \frac{4}{3}$

$\frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \boxed{0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4}}$

b) on a

$0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4}$

Pour tout $K \geq 3$

$$\begin{cases} K=3 \ \dots \ 0 \leq \frac{U_4}{U_3} \leq \frac{3}{4} \\ K=4 \ \dots \ 0 \leq \frac{U_5}{U_4} \leq \frac{3}{4} \\ K=5 \ \dots \ 0 \leq \frac{U_6}{U_5} \leq \frac{3}{4} \\ \vdots \\ K=n-2 \ \dots \ 0 \leq \frac{U_{n-1}}{U_{n-2}} \leq \frac{3}{4} \\ K=n-1 \ \dots \ 0 \leq \frac{U_n}{U_{n-1}} \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

$0 \leq \frac{U_n}{U_3} \leq \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{3}{4}$ (n-4+1 fois)

$\Rightarrow 0 \leq \frac{U_n}{U_3} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$

$\Rightarrow 0 \leq U_n \leq U_3 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$

or

$U_3 = \frac{3^3}{3!} = \frac{27}{3 \times 2 \times 1} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$

donc $\boxed{0 \leq U_n \leq \frac{9}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}}$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} = 0$

Car $0 < \frac{3}{4} < 1$

alors $\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 0}$ D'après T.G

3) $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^3 (3-x)^n e^x \, dx$

et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots + \frac{3^n}{n!}$

a) $I_1 = \int_0^3 (3-x) e^x \, dx$

$I_1 = A$

avec $A = e^3 - 4$ d'après 1.d)

$\Rightarrow \boxed{I_1 = e^3 - 4}$

b) $0 \le x \le 3$

$0 \le 3 - x \le 3$

$\Rightarrow 0 \le (3-x)^n \le 3^n$

$\Rightarrow 0 \le (3-x)^n e^x \le 3^n e^x$

Par intégration

$$0 \le \frac{1}{n!}\int_0^3 (3-x)^n e^x \, dx \le \frac{1}{n!}\int_0^3 3^n e^x \, dx$$

$$\Rightarrow 0 \le I_n \le \frac{3^n}{n!}\left[e^x\right]_0^3$$

$$\Rightarrow 0 \le I_n \le \frac{3^n}{n!}(e^3 - 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \le I_n \le (e^3 - 1) U_n}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ alors d'après

théorème de gendarme $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}$

c) $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^3 (3-x)^{n+1} e^x \, dx$

Par intégration par partie

$$\begin{cases} U(x) = \frac{1}{(n+1)!}(3-x)^{n+1} \\ V'(x) = e^x \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} U'(x) = \frac{-1}{n!}(3-x)^n \\ V(x) = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \left[\frac{1}{(n+1)!}(3-x)^{n+1} e^x\right]_0^3 + \frac{1}{n!}\int_0^3 (3-x)^n e^x \, dx$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(3-3).e^3 - \frac{1}{(n+1)!}3^{n+1} \times e^0 + I_n$$

$$I_{n+1} = I_n - \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\boxed{\Rightarrow I_{n+1} = I_n - U_{n+1}}$$

d) Démontrons par récurrence que

$\forall x \ge 1$; $e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + I_n$

* Vérifions pour $n = 1$

Pour $n = 1$ on a $\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + I_1 = 1 + 3 + e^3 - 4$

Vraie pour $n = 1$

* on suppose que

$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + I_n$

* on démontre que

$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$

on a

$$\underbrace{1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{2^n}}_{(e^3 - I_n)} + \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

$$(e^3 - I_n) + U_{n+1} + I_n - U_{n+1}$$

$$= e^3$$

Conclusion

$\forall n \ge 1$ on a

$$\boxed{e^3 = \underbrace{1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!}}_{S_n} + I_n}$$

on a $e^3 = S_n + I_n$

$\iff S_n = e^3 - I_n$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} e^3 - I_n = e^3 - 0$$

donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = e^3}$$

Exercice 4 :

1) g est définie sur $[0, +\infty[$

$$\begin{cases} g(x) = 1 + x^3 - 3x^3 \ln x & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (1 + 0 - 0) = 1 = g(0)$

donc g est continue en 0^+

• $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1 + \infty - \infty$ F. I

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3(1 - 3\ln x) + 1) =$
$= +\infty - \infty = -\infty$

b) le tableau de variation de g

$g'(x) = 3x^2 - (9x^2 \ln x + \frac{1}{x} \cdot 3x^3)$
$= 3x^2 - 9x^2 \ln x - 3x^2$

$g'(x) = -9x^2 \ln x$

Signe de $g'(x)$ est le signe contraire de ln

$-9x^2 \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$-9x^2$	0	$-$		$-$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

c) g est continue et strictement $\searrow$ sur $[1, +\infty[$ et change de signe donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha > 1$ comme $g(1) = 2 > 0$ et $g(2) = 9 - 24 \ln 2 < 0$ alors

$1 \alpha < 2$

• le signe de $g(x)$

g est $\searrow$ sur $[1, +\infty[$

Pour $1 < x < \alpha$ on a

$g(x) > g(\alpha) = 0$

Pour $x > \alpha$ on a

$g(x) < g(\alpha) = 0$

D'où

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$		$-$	

2) f est définie sur $]0, +\infty[$

$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^3}$

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{-\infty}{0}\right) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{1 + x^3} = 0 \times 0 = 0$

$\therefore \boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$

$\therefore \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

2.b)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot(1+x^3) - (3x^2)\ln x}{(1+x^3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1+x^3-3x^3\ln x}{x(1+x^3)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^3)^2}}$$

Le tableau de Variation de f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3) $\forall x > 1;\ F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

a) f est continue sur $[1;+\infty[$ donc elle admet une primitive H derivable sur $[1,+\infty[$

$F(x) = H(x) - H(1)$

Donc F est derivable et

$F'(x) = H'(x) - 0$

$= f(x)$

Pour tout $x > 1$, $f(x) > 0$ donc F est croissante

T.V de F.

x	1		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	

b) Pour tout $t \geq 1$ on a

$1 < t^3 < 1+t^3 \leq (1+t)^3$

Car

$(1+t)^3 = 1+3t+3t^2+t^3 \geq t^3$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+t)^3} \leq \frac{1}{1+t^3} \leq \frac{1}{t^3}$$

$t > 1 \Rightarrow \ln t > 0$

donc

$$\frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq \frac{\ln t}{1+t^3} \leq \frac{\ln t}{t^3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^3}}$$

c) $\int_1^x \frac{\ln t}{t^3}\,dx$

$$\begin{cases} U(t) = \ln t \\ V'(t) = \frac{1}{t^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(t) = \frac{1}{t} \\ V(t) = \frac{-1}{2t^2} \end{cases}$$

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^3}\,dx = \left[-\frac{\ln t}{2t^2}\right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t} \times \frac{1}{2t^2}\,dt$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{dt}{t^3}$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2t^2}\right]_1^x$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{x^2} + 1\right)$$

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^3}\,dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4}$$

3. d)

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{a(1+t)^2}{t(1+t)^2} + \frac{bt(t+1)}{t(1+t)^2} + \frac{ct}{t(1+t)^2}$$

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{(a+b)t^2+(2a+b+c)t+a}{t(t+1)^2}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}}$$

4. a) on a : $\frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq g(t) \leq \frac{\ln t}{t^3}$

$$\Rightarrow \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3}\,dt \leq \int_1^x g(t)\,dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t^3}\,dt$$

on pose $J = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3}\,dt$

Calculons J

$$\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = \frac{1}{(1+t)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1/t \\ v(t) = \frac{-1}{2(1+t)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow J = \left[\frac{-\ln t}{2(1+t)^2}\right]_1^x + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t} \times \frac{1}{(1+t)^2}\,dt$$

$$= \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}\,dt$$

$$= \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\left[\ln t - \ln(t+1) + \frac{1}{t+1}\right]_1^x$$

$$= \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{t}{t+1}\right) + \frac{1}{t+1}\right]_1^x$$

$$J = \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}$$

$$J = \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1-2\ln 2}{4}$$

Donc : on remplaçant integrales $\int_1^x \frac{\ln t}{t^3}\,dt$ et $J = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3}\,dt$ par leur valeur on a :

$$-\frac{\ln x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1-2\ln 2}{4} \leq F(x) \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} - \frac{\ln x}{2x^2}$$

b) $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{-\ln x}{2(1+x)^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\ln x}{x} \times \frac{x}{2(1+x)^2} = 0 \times 0 = 0$

Car $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2(x+1)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0$

donc

$$0 - 0 + 0 - \frac{1-2\ln 2}{4} \leq \ell \leq \frac{1}{4}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{4}}$$

c)