BAC 2016

FaTiMeTOU
AbDeLLaHi
N° 1039

7C 2318

Session Normale

Exercice 1 :

1) $5x - 3y = 17$

ⓐ $\begin{array}{c|c} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{array}$ $\quad \begin{array}{c|c} 3 & 2 \\ \boxed{1} & 1 \end{array}$

$5 \wedge 3 = 1$

donc

E admet une solution entières.

$(x, y) = (4, 1)$

$5(4) - 3(1) = 20 - 3 = 17$

donc

$(4, 1)$ est une solution particulier de E.

ⓑ $\begin{cases} x = 4 + 3k \\ y = 1 + 5k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2)

ⓐ $x \mid y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ où $y = kx$

$\Rightarrow 5x - 3(kx) = 17$

$x(5 - 3k) = 17$

$\Rightarrow \boxed{x \mid 17}$

ⓑ $\dfrac{1 + 5m}{4 + 3m} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (4 + 3m) \mid (1 + 5m)$

on a $x \mid y \Leftrightarrow x \mid 17$

donc $x \in \{1, -1, 17, -17\}$

- $x = 1 \Leftrightarrow 4 + 3m = 1 \Rightarrow \boxed{m = -1}$

$\dfrac{1 + 5(-1)}{4 + 3(-1)} = \dfrac{-4}{1} = -4 \in \mathbb{Z}$

- $x = -1 \Rightarrow 4 + 3m = -1 \Rightarrow m = -5/3$

$\dfrac{1 + 5(-5/3)}{4 + 3(-5/3)} = \dfrac{\frac{3 - 25}{3}}{4 - 5} = \dfrac{3 - 25}{-3} = \dfrac{-22}{3} \notin \mathbb{Z}$ réjet

- $x = 17 \Rightarrow 4 + 3m = 17$

$\Rightarrow m = 13/3$

$\dfrac{1 + 5(13/3)}{4 + 3(13/3)} = \dfrac{\frac{3 - 65}{3}}{4 + 3}$

$= \dfrac{-62}{21} \notin \mathbb{Z}$ réjet.

- $x = -17 \Rightarrow 4 + 3m = -17$

$\Rightarrow \boxed{m = -7}$

$\dfrac{1 + 5(-7)}{4 + 3(-7)} = \dfrac{1 - 35}{4 - 21} = \dfrac{34}{17} = 2 \in \mathbb{Z}$

les valeurs de m sont :

$\boxed{m = -7}$ ou $\boxed{m = -1}$

Exercice 2 :

$P(z) = z^3 - (4+8i)z^2 + (-14+24i)z + 32 + 4i$

1)

ⓐ $P(2i) = (2i)^3 - (4+8i)(2i)^2 + (-14+24i)(2i) + 32 + 4i$

$= -8i + 16 + 32i - 28i - 48 + 32 + 4i$

$P(2i) = 0$

	1	$-4-8i$	$-14+24i$	$32+4i$
$2i$	$\downarrow$	$2i$	$-8i+12$	$-32-4i$
	1	$-4-6i$	$-2+16i$	0

$P(z) = (z-2i)(z^2-(4+6i)z - 2 + 16i)$

ⓑ $P(z) = 0$

$\Rightarrow z_0 = 2i$ ou $z^2 - (4+6i)z - 2 + 16i = 0$

$\Delta' = (2+3i)^2 + 2 - 16i$

$= 4 - 9 + 12i + 2 - 16i$

$= -3 - 4i = -(3+4i)$

$= -(4 - 1 + 4i)$

$\Delta' = -(2+i)^2 = i^2(2+i)^2$

$\boxed{\delta' = 2i - 1}$

$z_1' = 2 + 3i - 2i + 1 = 3 + i$

$z_2' = 2 + 3i + 2i - 1 = 1 + 5i$

$S = \{2i, 3+i, 1+5i\}$

$\boxed{z_1 = 2i = z_A}$

$\boxed{z_2 = 3+i = z_B}$

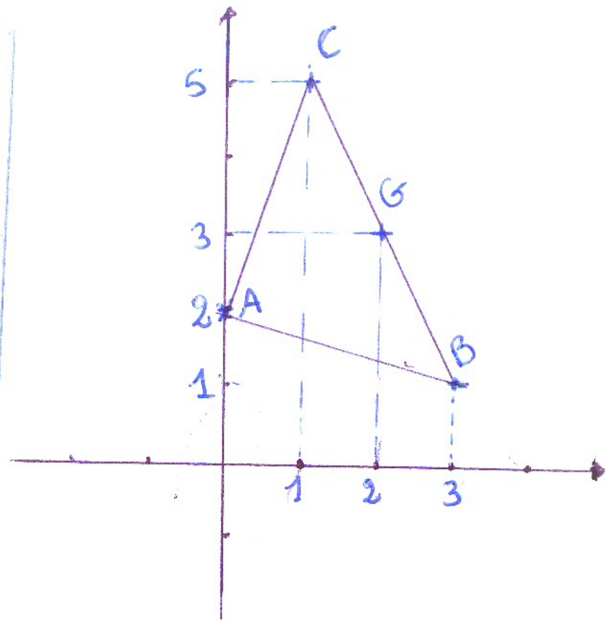
$\boxed{z_3 = 1+5i = z_C}$

ⓒ $G = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} O & A & C \\ \hline 5 & -7 & 4 \end{array}$

$z_G = \dfrac{5z_O - 7z_1 + 4z_3}{5-7+4} = \dfrac{-7(2i) + 4(1+5i)}{2}$

$= -7i + 2 + 10i = \boxed{2 + 3i = z_G}$

②



2) $Q(z) = z^2 - (4+6i)z - 2 + 16i$

ⓐ $z = x + iy$

$Q(z) = (x+iy)^2 - (4+6i)(x+iy) - 2 + 16i$

3

Exercice 3 :

1)
$$\begin{cases} f(x) = x e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x \, e^{\frac{1}{x}} = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$

donc : f est continue à gauche en 0^-.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$ F.I

on pose :

$t = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} t = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$x = \frac{1}{t}$

$\lim_{x \to 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} e^t = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$

f n'est pas continue en 0^+ et $\mathcal{C}_f$ admet un A.V en $x = 0$.

b) $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

donc : f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$ d'où $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente horizontale à gauche en 0.

$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x \to -\infty} x e^{\frac{1}{x}} - x - 1)$ F.I.

on pose : $t = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} t = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$

et $x = \frac{1}{t}$

$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{t \to 0^-} \left[\frac{1}{t} e^t - \frac{1}{t} - 1\right]$

$= \lim_{t \to 0^-} \left[\frac{e^t - 1}{t} - 1\right] = 0$

d'où : $\boxed{\Delta : y = x + 1 \text{ . A.O à } \mathcal{C}_f \text{ au voisinage de } -\infty}$.

- $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x \to +\infty} (x e^{\frac{1}{x}} - x - 1)$

$= \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{e^t - 1}{t} - 1\right) = \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{e^t - 1}{t} - 1\right)$

$= 0$

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x+1)) = 0}$

d'où :

$\boxed{\Delta : y = x + 1 \text{ . A.O à } \mathcal{C}_f \text{ au voisinage de } +\infty}$

c) - $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x e^{\frac{1}{x}} = -\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

- $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} x$

$= e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$

$\forall x \neq 0 \; \boxed{f'(x) = \frac{x - 1}{x} e^{\frac{1}{x}}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x - 1}{x} = 0$

$x \neq 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$f(1) = e$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	0 $+$		$+$
$\frac{x-1}{x}$	$+$	‖ $-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	‖ $-$	0	$+$

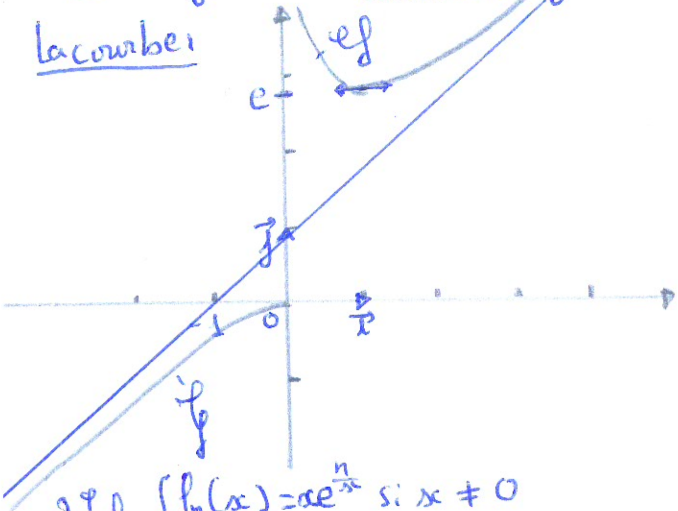
T.V de f:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \Vert +\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

d) $D: y = x+1$

x	0	-1
y	1	0

La courbe:



2] f_n $\begin{cases} f_n(x) = xe^{\frac{n}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

a) Soit: $k \in \mathbb{R}^*$ et h_n l'homothétie de centre O et de rapport k, soit M et M' des points tels que: $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ où M' est l'image de M par h_n, donc:

$h_n(M) = M' \iff \overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$

$\iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

$h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_n \iff M(x,y) \in \mathcal{C}$ et $M'(x',y') \in \mathcal{C}_n$

on a: $f(x) = y$ et $f_n(x') = y'$

$\iff f_n(kx) = kf(x)$

$kxe^{\frac{n}{kx}} = k(xe^{\frac{1}{x}})$

$e^{\frac{n}{kx}} = e^{\frac{1}{x}}$

$\frac{n}{kx} = \frac{1}{x} \iff \boxed{k = n}$

donc: $\mathcal{C}_n$ est l'image de $\mathcal{C}$ par l'homothétie de centre O et de rapport n.

b) $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_n(x) = xe^{\frac{n}{x}}$

$f_n'(x) = e^{\frac{n}{x}} - \frac{n}{x^2} e^{\frac{n}{x}} x$

$= e^{\frac{n}{x}}\left(1 - \frac{n}{x}\right)$

$f_n'(x) = e^{\frac{n}{x}}\left(\frac{x-n}{x}\right)$

La tangente est horizontale pour:

$f_n'(x) = 0 \iff \frac{x-n}{x} = 0$

$x \neq 0 \iff \boxed{x = n}$,

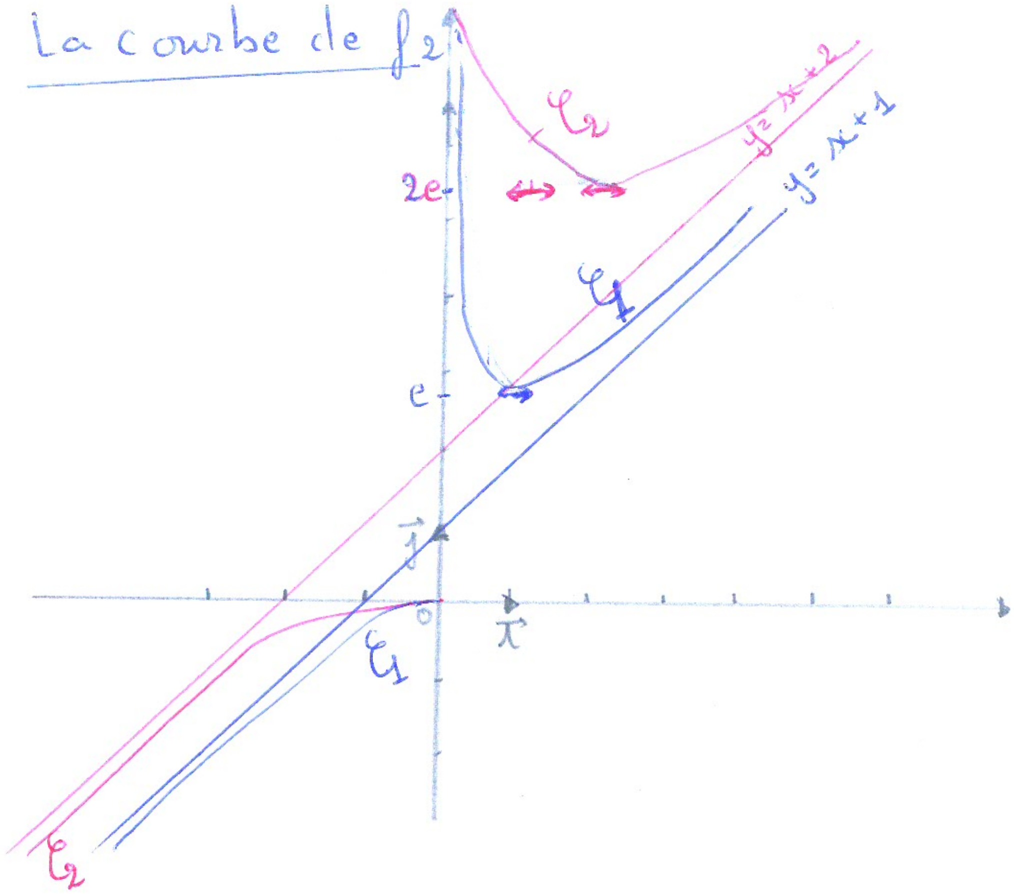
$f_n(n) = ne$

donc les points $M_n(n, ne)$ de $\mathcal{C}_n$ en lesquels $\mathcal{C}_n$ admet une tangente horizontale sont sur la droite d'équation $y_n = x_n e \iff \boxed{y = xe}$

c) T.V de f_2:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \Vert +\infty$	$\searrow$	$2e$	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe de f_2



Exercice 4 :

$f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{1+x}$, $x \in]-1,+\infty[$

1) ⓐ • $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)\ln(x+1) - x}{x+1}$

on pose : $t = x+1$ et $x = t-1$

$\lim_{x\to -1^+} t = \lim_{x\to -1^+} x+1 = 0^+$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\ln t - t + 1}{t} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

donc : $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ admet un A.V en } x=-1}$

• $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} = +\infty$

• $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{\frac{x}{1+x}}{x}$

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln[x(1+\frac{1}{x})]}{x} - \frac{1}{1+x}$

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x} - \frac{1}{1+x} = 0$

donc : $\mathscr{C}_f$ admet une B.P de direction (ox) au voisinage de $+\infty$.

ⓑ $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{x}{(x+1)^2} = f'(x)}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

T.V de f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

ⓒ $f''(x) = \frac{(x+1)^2 - 2(x+1)x}{(x+1)^4}$

$= \frac{x+1-2x}{(x+1)^3} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$

$\boxed{f''(x) = \frac{1-x}{(x+1)^3}}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

on a : $(x+1)^3 > 0 \ \forall x \in]-1,+\infty[$

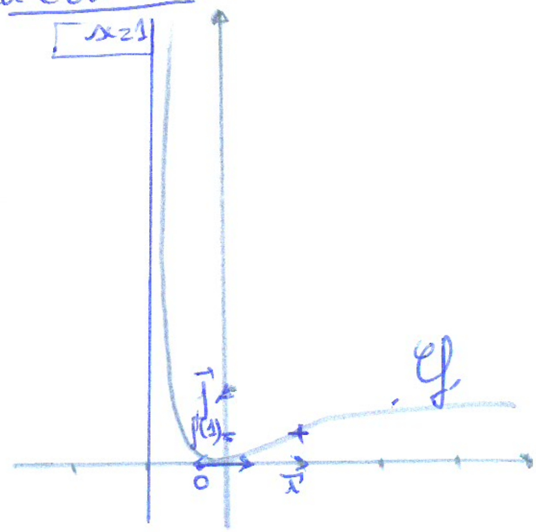
x	-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

$f(1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$

Comme :

f'' s'annule en 1 en changeant de signe, le pnt $(1, f(1)) = (1, \ln 2 - \frac{1}{2})$ est donc un pnt d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

ⓓ la courbe :



2] ⓐ $\int_0^x \ln(1+t)\,dt$

on pose : $\begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=\ln(1+t)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t)=t+1 \\ v'(t)=\frac{1}{1+t}\end{cases}$

$$\int_0^x \ln(1+t)\,dt = \left[(t+1)\ln(t+1)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t+1}{t+1}\,dt$$

$$= (x+1)\ln(x+1) - [t]_0^x$$

$$= (x+1)\ln(x+1) - x$$

$$\boxed{\int_0^x \ln(1+t)\,dt = (x+1)\ln(x+1) - x}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \ln(1+t) - \frac{t}{t+1}\,dt$$

on note : $J = \int_0^x \ln(1+t)\,dt$

$$F(x) = \int_0^x \ln(1+t)\,dt - \int_0^x \frac{t-1+1}{t+1}\,dt$$

$$= J - \int_0^x \frac{-1}{t+1} + \frac{t+1}{t+1}\,dt$$

$$= J + \int_0^x -1 + \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$= J - \left[t - \ln(t+1)\right]_0^x$$

$$= J + \left[\ln(t+1) - t\right]_0^x$$

$$= (x+1)\ln(x+1) - x + \ln(x+1) - x$$

$$= \ln(x+1)(x+2) - 2x$$

$$\boxed{F(x) = (x+2)\ln(x+1) - 2x}$$

ⓑ $A_n = \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$

$$= F\left(\tfrac{1}{n}\right) - F(0) = F\left(\tfrac{1}{n}\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{n}+2\right)\ln\left(\tfrac{1}{n}+1\right) - \tfrac{2}{n}$$

$$\boxed{A_n = \frac{1+2n}{n}\ln\left(\frac{1+n}{n}\right) - \frac{2}{n}}$$

3] $x \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}^*$

ⓐ $\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1}(-x)^{k-1}$ est la somme d'une S.G de $n+1$ termes et de raison $q=-x \neq -1$ (car $x\in]0,1[$) et de 1er terme 1. donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-x)^{k-1} = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}$$

$$= \frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{x+1}$$

d'où :

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}x^{k-1} + (-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{x+1}}$$

ⓑ $\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\left(\int_0^x t^{k-1}\,dt\right) + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{t+1}\,dt$

$$\left[\ln(1+t)\right]_0^x = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\left[\frac{t^k}{k}\right]_0^x + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{t+1}\,dt$$

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{t+1}\,dt}$$

ⓒ on multiple l'égalité de 3]ⓐ par x, et on aura :

$$\boxed{\frac{x}{1+x} = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}x^k + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+2}}{1+x}} \quad ①$$

d'autre part :

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{t+1}\,dt} \quad ②$$

2 - 1

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x^k \left(\frac{1}{k} - 1\right) + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t+1}\,dt + (-1)\frac{(-1)^{n+1} x^{n+2}}{1+x}$$

donc

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1-k}{k} x^k + \frac{(-1)^{n+2} x^{n+2}}{1+x} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t+1}\,dt}$$

d) on a $0 < t \leq 1$ (car $t \in [0, x] \subset [0, 1]$)

$\Rightarrow t+1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{t+1} \leq 1 \quad t \in [0,1] \Rightarrow t^{n+1} > 0$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{t^{n+1}}{t+1} \leq t^{n+1}$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t+1}\,dt \leq \int_0^x t^{n+1}\,dt$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t+1}\,dt \leq \left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^x$

$\Rightarrow \boxed{0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t+1}\,dt \leq \frac{x^{n+2}}{n+2}}$

e) on a $x \in]0, 1[\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = 0$

donc d'après le th. de gendarme. $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t+1}\,dt = 0$

d'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t+1}\,dt = 0}$ a

D'autre part

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{n+2} x^{n+2}}{1+x} = 0}$ b

et de a et b

on a

$$\boxed{f(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1-k}{k} x^k}$$