Nom : Fatimetou / Sid' Ahmed / N° : 1647 / classe : 7C
ECoLes privés ELmarif et ERRaja / Bac : 2017 (S.N)

Exo4) 4 fois

pour tout entier naturelle Strictement Superieleur à 1 la ponction $f(x)$ est de finir Sur $]0,+\infty$ par $f_n(x)=(\ln x)^n$ et (C_n) Sa Courbe representatives dans Un repere orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1°) Callule de Lim $F_n(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{n\to-\infty} (\ln)^n = +\infty$

Discussion de Lim $F(x)$ suivant la pariété de n : Comme Lim $F(x)$ Suivant la parité de n : Comme $\lim\limits_{n\to 0} \ln x = -\infty$ alors : Si n est impair $\lim\limits_{n\to 0} F(x) = +\infty$

Si n'est impair : $\lim\limits_{n\to 0} F(x) = +\infty$

b) Calculer de $F(x)$ derivée de $F_n(x)$:

est le tableau de variation de $F_n(x)$ (suivant La parité de n)

La derivée de $F_n(x)$ est :

$F_n(x) = \dfrac{n(\ln x)^{n-1}}{x}$

Si n'est impaire alors n-1 est paire et par consequet $(\ln x) \geq 0$ d'ou le Tableau de variation

x	0	
$F_n(x)$		+
$F_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$

Si n est pair alors n-1 est n-1 impair d'ou le Signe de $(\ln x)$ est Celui de $\ln x$ d'ou Le tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$f_n(x)$		−	0	+	
$F_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2°) Etudure les postion relatives de (C_2) et (C_3) et pour ce La etudion le Sign de $F_3(x)-F_2(x)$ =

$F_3-F_2(x) - F_2(x)^3 - (\ln x)^2 =$
$(\ln(x))^2(\ln x-1)$

Donc

x	0 1 e $+\infty$
$(\ln x)^2$	+ 0 + +
$(\ln x-1)$	- - 0 +
$F_3(x)-F_2(x)$	- 0 - 0 +

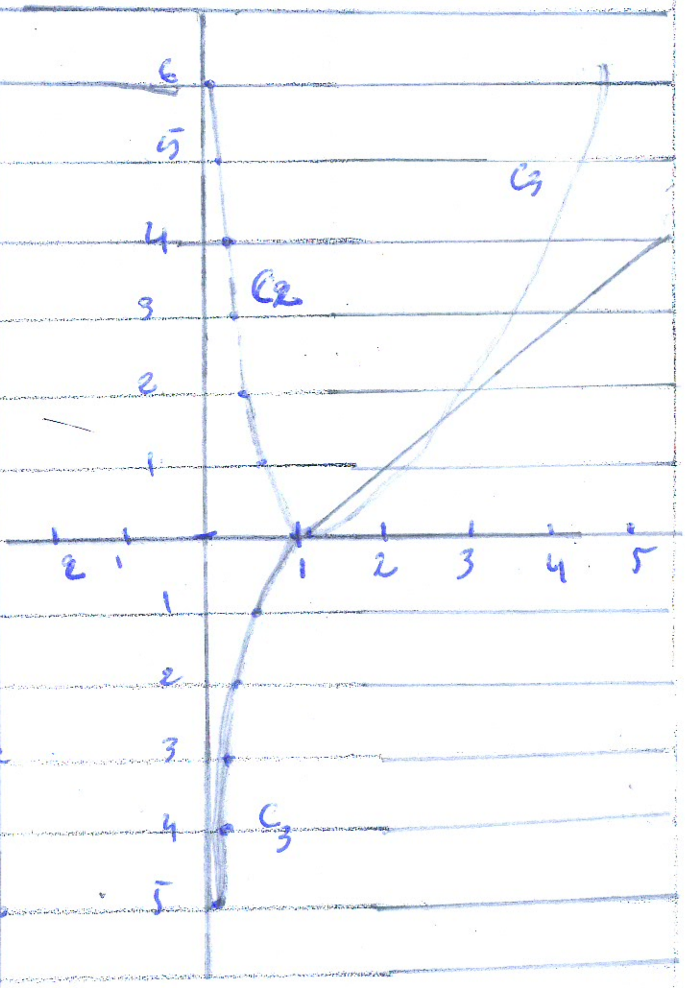
posiont relatives

b) Construction (C_2) et (C_3) dans le meme repere :

on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F_3(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F_2(x)}{x}$

alors chacune des Courbe (C_2) et (C_3)
admet une branche parabolique de direction (ox) en $+\infty$

De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} F_2(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0} F_3(x) = -\infty$
alors chacune de courbes (C_2) et (C_3) admet une asymptote Verticale d'equation $x=0$



pour toute entier naturel n strictement superieur a 1^{er} on pose

$I_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int_1^e F_n(x)\,dx$ et $U_n \sum \frac{(-1)^k}{k!}$

3) a) Utilison une integration par partie pour montrer que $I_2 = \frac{e-2}{2}$

$I_2 = \frac{(-1)}{2!}\int_1^e F_2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^e (\ln x)^2$

on pose : $U(x) = (\ln x)^2$

$V'(x) = 1 \Rightarrow V(x) = x$

Alors $I_2 = \frac{1}{2}\left(\left[x(\ln x)^2\right]_1^e - 2\int_1^e \ln x\, dx\right)$

$\frac{1}{2}\left(e - 0 \int_1^e \ln x \, dx\right)$

Calculons $\ln x\, dx$ en utilisation integration par partie

$U(x) = \ln(x) \Rightarrow U'(x) = x$

Alors $\int \ln x\, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e dx$

$= e - 1 = 0$ Donc $I_2 = \frac{e-2}{2}$

b) montrons que pour tout naturel n strictement superieur on a $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} = e + I_n$

On a $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \int^e (\ln x)^{n+1} d(x)$

utilisation une integration par par partie

on pose $U(x) = (\ln x)^{n+1} \Rightarrow U(x) = \frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}$

$V'(x) = 1 \Rightarrow V'(x) = x$

$I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \left([x(\ln x)^{n+1}]^e - (n+1)\int^e (\ln x)^n dx\right)$

$I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\left(e - (n+1)\frac{n!}{(-1)^n} I_n\right)$

$= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\left(e - \frac{(n+1)!}{(-1)^{n+1}} I_n\right)$

Donc $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = e + I_n$

c) Verifions que $I_2 = -1 + e\, u_2$

Nous savons que $I = \frac{e-2}{2}$

alors $I_2 = -1 + \frac{2}{2} - 1 + \frac{1}{2}$ or $-1 + \left(\frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)}{1!} + \frac{(-1)}{0!}\right)e$

Car $u_n = \sum \frac{(-1)}{k!} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} = u_2$. Donc $I_2 = -1 + e - u_2$

d) Deduisons que $\forall n \geq 2$, $I_n = -1 + e\, u_n$ par recurrence

pour $n = 2$; $I_2 = -1 + e\, u_2$ Donc la relation est vacurrence

Initialisation !

Pour $n = 2$! $I_2 = -1 + e\, u_2$

Donc La relation est verifiee pour $n = 2$ Heredite ;

Supposons que $I_n = -1 + e\, u_n$