Nom : toutou mt med Mehmod memoun
classe : $7C_1$ Année : 2016 - 2017

- Exemples et methodes de levé de l'indetermination

Exercice : ②
calculer $\lim f(x)$

① $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$ $x \to +\infty$

② $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 3}{\sqrt{9x+2}}$ $x \to +\infty$

③ $f(x) = \sqrt{4x^2+3} - 2x$ $x \to +\infty$

④ $f(x) = \sqrt{3x^2+2x+1} - x\sqrt{3}$ $x \to +\infty$

⑤ $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$

Solution

1) $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$

expression conjugué

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+3} + \sqrt{x}) = +\infty$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+3} + \sqrt{x})$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+}$$

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 3}{\sqrt{5x+2}}$

on procède à un changement d'ecriture

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{5x+2}} - \frac{3}{\sqrt{5x+2}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{5x+2} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{5x+2}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{5x+2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{5x+2} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{\sqrt{5x+2}} = 0^+$$

par addition $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

• On peut aussi factoriser par $\sqrt{x}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} - 3}{\sqrt{x\left(5+\frac{2}{x}\right)}} = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{5+\frac{2}{x}}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}}}{\sqrt{5+\frac{2}{x}}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

3) $f(x) = \sqrt{4x^2+3} - 2x$

Expression conjuguée

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{4x^2+3} - 2x\right)\left(\sqrt{4x^2+3} + 2x\right)}{\sqrt{4x^2+3} + 2x}$$

$$= f(x) = \frac{3}{\sqrt{4x^2+3} + 2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+3} + 2x\right) = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+ = 0}$$

4) $f(x) = \sqrt{3x^2+2x-1} + x\sqrt{3}$

Expression conjuguée

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{3x^2+2x-1} - x\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3x^2+2x-1} + x\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3x^2+2-1} + x\sqrt{3}}$$

$$= \frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}} + \sqrt{3}\right)} = f(x) = \frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}} + \sqrt{3}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(2-\frac{1}{x}\right) = 2$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}} + \sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}$$

par quotient $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2}{2\sqrt{3}}$

$$\boxed{\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

5) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$ $\quad x\to+\infty$

On utilise l'expression conjuguée puis On factorise et On simplifie

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}} - x}{\sqrt{x\left(1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}\right)} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}}} + 1\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}} + 1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \,' = \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}+1\right)$$

$= 2$. par quotient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}}$$