Zeinebou / Taleb   N° 1076.

Exercice :

Soit f la fonction de variable réelle définie par :

$$f(x) = \frac{x + x^2 + \dots + x^{2015} - 2015}{x - 1}$$

Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^k - 1}{x - 1}$, $(k \in \mathbb{N}^*)$ en déduire $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

solution :

Méthode 01 : changement de variable.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^k - 1}{x - 1} = \frac{1^k - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ F.I}$$

On pose : $g(x) = x^k \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 1 \\ g'(x) = k.x^{k-1} \\ g'(1) = k. \end{cases}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^k - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = k.$$

$$\boxed{\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{x^k - 1}{x - 1} = k}$$

Méthode 02 :

On a : $1 + x + x^2 + \dots + x^n = 1 \times \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

$\Rightarrow 1 + x + \dots + x^{k-1} = \frac{x^k - 1}{x - 1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^k - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}) = 1 + 1 + \dots + 1$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x + x^2 + \dots + x^{2015} - 2015)}{x - 1}$; (on sépare 2015 en $1 + 1 + 1 + \dots + 1$)

$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x - 1) + (x^2 - 1) + \dots + (x^{2015} - 1)}{x - 1}$; (on casse le barre)

$= \lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x - 1}{x - 1} + \frac{x^2 - 1}{x - 1} + \dots + \frac{x^{2015} - 1}{x - 1} \right) = (1 + 2 + \dots + 2015)$; (somme d'une S.A)

$= \frac{2015}{2}(1 + 2015) = 2015 \times 1008$

$$\boxed{\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^{2015} - 2015}{x - 1} = 2031120}$$