Nom : Lalla Aicha m/Salah.

Exercice 5

Existe-t-il une unique fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3 dont la courbe représentative dans un repère orthonormé admet au point A(1,0) une tangente parallèle à la droite d'équation $x+y=0$ et au point B(0,-2) une tangente perpendiculaire à la droite d'équation $6x+y=0$?

Solution

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

1) $A(1,0) \in \mathscr{C} \Rightarrow f(1) = 0$

$\boxed{a+b+c+d=0}$ (1)

2) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$D = x+y=0 \Rightarrow y=-x$

$M = -1$

T : tangente à $\mathscr{C}$ en A

$T \parallel D \Rightarrow f'(1) = -1$

$\boxed{3a+2b+c=-1}$ (2)

3) $B(0,-2) \in \mathscr{C}$ $f(0) = -2$

$\boxed{d=-2}$ (3)

$D' = 6x+y=0 \Rightarrow y=-6x$

$\Rightarrow M' = -6$

T' : tangente à $\mathscr{C}$ en B

$T' \perp D' \Rightarrow -6f'(0) = -1$

$-6c = -1$

$\boxed{c = \frac{1}{6}}$ (4)

on resout le système

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 3a+2b-c=-1 \\ d=-2 \\ c=\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a+2b+\frac{1}{3}-4=0 \\ 3a+2b+\frac{1}{6}=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a+2b=\frac{11}{3}=\frac{22}{6} \\ 3a+2b=\frac{-7}{6} \end{cases}$$

$\boxed{a = \frac{-29}{6}}$

$a+b = \frac{11}{6} \Rightarrow b = \frac{11}{6} + \frac{29}{6}$

$b = \frac{40}{6} \Rightarrow \boxed{b = \frac{20}{3}}$

Alors il existe une unique polynome ≤ 3 verifiant les conditions :

$\boxed{f(x) = -\frac{29}{6}x^3 + \frac{20}{3}x^2 + \frac{1}{6}x - 2}$