Nom : toutou /Sidi Mahmoud.

Exercice1:

Exercice 1

Pour tout entier naturel n on pose : $U_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2}$, $V_n = \frac{2^n + 4n - 3}{2}$

1) Déterminer la nature de chacune des suites (a_n) et (b_n) tels que:

$a_n = U_n + V_n$; $b_n = U_n - V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) En déduire : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$; $S'_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

Solution :

1)- $U_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2}$; $V_n = \frac{2^n + 4n - 3}{2}$

* $a_n = U_n + V_n = \frac{2^n - \cancel{4n} + \cancel{3} + 2^n + \cancel{4n} - \cancel{3}}{2}$

$a_n = \frac{2^n + 2^n}{2} \Rightarrow \boxed{a = 2^n}$

du type q^n, donc (a_n) est une S.G de raison $\boxed{q = 2}$

* $b_n = U_n - V_n = \frac{\cancel{2^n} - 4n + 3 - \cancel{2^n} - 4n + 3}{2}$

$b_n = \frac{-8n + 6}{2} \Rightarrow \boxed{b_n = -4n + 3}$

du type $\alpha_n + \beta$ donc (b_n) est une S.A de raison $\boxed{r = -4}$

2)- $S_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n$

$S'_n = V_0 + V_1 + \cdots\cdots + V_n$

On peut remarque que $\begin{cases} 2U_n = a_n + b_n \\ 2V_n = a_n - b_n \end{cases}$

$U_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $V_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$

$S_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n$

Donc $S_n = \frac{1}{2}(a_0 + b_0) + \frac{1}{2}(a_1 + b_1) + \cdots\cdots + \frac{1}{2}(a_n + b_n)$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + \cdots + a_n + b_n\right]$$

$$S_n = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)}_{\text{Somme S.G}} + \underbrace{(b_0 + b_1 + \cdots + b_n)}_{\text{Somme S.A}}\Big]$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{n+1}{2}(b_0 + b_n\right]$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2} + \frac{n+1}{2}(3 - 4n + 3)\right]$$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}\left[1 + 2^{n+1} + (n+1)(3-2n)\right]}$$

$$S'_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$$

$$S'_n = \frac{1}{2}(a_0 - b_0) + \frac{1}{2}(a_1 - b_1) + \cdots + \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

$$S'_n = \frac{1}{2}\left[a_0 + a_1 + \cdots + a_n - (b_0 + b_1 + \cdots b_n\right]$$

En utilisent les calcules precedents, on obtient

$$\boxed{S'_n = \frac{1}{2}\left[-1 + 2^{n+1} - (n+1)(3-2n)\right]}$$