Exercice

Pour tout entier naturel n on pose : $U_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2}$, $V_n = \frac{2^n + 4n - 3}{2}$

1) Déterminer la nature de chacune des suites (a_n) **et** (b_n) **tels que:**

$$a_n = U_n + V_n; \quad b_n = U_n - V_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

2) En déduire : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$; $S'_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

1

Nom : Vayzze mint Moctar
classe : 7D1
École : Erraja

EXO : 1 P : 51

$u_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2}$; $v_n = \frac{2^n + 4n - 3}{2}$

$a_n = u_n + v_n$

$b_n = u_n - v_n$

1) $a_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2} + \frac{2^n + 4n - 3}{2}$

$\frac{2^n \cancel{- 4n} \cancel{+ 3} + 2^n \cancel{+ 4n} \cancel{- 3}}{2} = \frac{2^n + 2^n}{2} = \frac{\cancel{2} \times 2^n}{\cancel{2}} = 2^n$

$\boxed{a_n = 2^n}$

$a_{n+1} = 2^{n+1}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2 \times \cancel{2^n}}{\cancel{2^n}} = 2$

$\Rightarrow (a_n)$ Suite Géométrie de raison $q = 2$ et 1er terme

$\boxed{a_0 = 2^0 = 1}$

$\ast\ b_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2} - \frac{2^n + 4n - 3}{2} = \frac{2^n - 4n + 3 - 2^n - 4n + 3}{2} = \frac{-8n + 6}{2}$

$b_n = -4n + 3$; $b_{n+1} = -4(n+1) + 3$

$= -4n - 4 + 3$; $b_{n+1} = -4n - 1$

$b_{n+1} - b_n = -\cancel{4n} - 1 + \cancel{4n} - 3 = -4$ $\Rightarrow (b_n)$ est suite Arthimétique

des raison $r = -4$ et 1er termes $\boxed{b_0 = 3}$

2

② en déduire : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$a_n = u_n + v_n$ ①

$b_n = u_n - v_n$ ②

① + ② $\quad a_n + b_n = 2u_n \qquad \boxed{u_n = 1/2\, a_n + 1/2\, b_n}$

$u_0 = 1/2\, a_0 + 1/2\, b_0$

$u_1 = 1/2\, a_1 + 1/2\, b_1$

$u_2 = 1/2\, a_2 + 1/2\, b_2 \dots + u_n = 1/2\, a_n + 1/2\, b_n$

$S_n = 1/2\,(a_0 + a_1 + a_2 \dots a_n) + 1/2\,(b_0 + b_1 + \dots b_n)$

$S_n = 1/2 \times a_0 \times \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1-2} + 1/2\, \dfrac{(n+1)(b_0 + b_n)}{2}$

$S_n = 1/2 \times 1 \times \dfrac{1 - 2^{n+1}}{-1} + 1/2\, \dfrac{(n+1)(3 - 4n + 3)}{2}$

$$\boxed{S_n = 1/2\,(2^{n+1} - 1) + \frac{(n+1)(-4n+6)}{4}}$$

• $v_0 = 1/2\, a_0 - 1/2\, b_0$

$v_1 = 1/2\, a_1 - 1/2\, b_1$

$v_n = 1/2\, a_n - 1/2\, b_n$

$S'_n = 1/2\,(a_0 + a_1 \dots a_n) - 1/2\,(b_0 + b_1 \dots + b_n)$

$$\boxed{S'_n = 1/2\,(2^{n+1} - 1) - \frac{(n+1)(4n+6)}{4}}$$