EXERCICE 2 (5 POINTS)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

E_α $\qquad z^2 - 2z\sin\alpha + 1 = 0$ où α est un réel donné.

1) Résoudre l'équation E_α et donner les solutions sous formes algébrique et trigonométrique.

2) En déduire l'écriture exponentielle des solutions de l'équation :

$$z^{2n} - 2z^n \sin\alpha + 1 = 0 \text{ où } n \in \mathbb{N}^* \text{ donné.}$$

Solution:

$E_\alpha = z^2 - 2z\sin\alpha + 1 = 0$

1) $\Delta = (2\sin\alpha)^2 - 4 = 4\sin^2\alpha - 4$

$= 4(\sin^2\alpha - 1) = -4\cos^2\alpha$

$= (2i\cos\alpha)^2$

$\Rightarrow \delta = 2i\cos\alpha$

$z_1 = \dfrac{2\sin\alpha + 2i\cos\alpha}{2}$ | $z_2 = \dfrac{2\sin\alpha - 2i\cos\alpha}{2}$

$\Rightarrow z_1 = \sin\alpha + i\cos\alpha$

et $z_2 = \sin\alpha - i\cos\alpha$

Forme algebrique:

$z_1 = i(-i\sin\alpha + \cos\alpha) = i(\cos\alpha - i\sin\alpha)$

$= e^{i\pi/2} \times e^{-i\alpha} \Rightarrow \boxed{z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}}$

Forme trigonometrique:

$\boxed{z_1 = 1(\cos(\pi/2 - \alpha) + i\sin(\pi/2 - \alpha))}$

$z_2 = \overline{z_1} \Rightarrow z_2 = e^{-i(\pi/2 - \alpha)}$

F. trigo: $\boxed{z_2 = 1(\cos(-\pi/2 + \alpha) + i\sin(-\pi/2 + \alpha))}$

2) On pocède à un changement de variable dans l'équation :

$z^{2n} - 2z^n \sin\alpha + 1 = 0$

On pose: $z^n = \mathfrak{z}$.

On trouve : $\mathfrak{z}^2 - 2\mathfrak{z}\sin\alpha + 1 = 0$

C'est l'équation de solutions:

$\boxed{z_1 = e^{i(\pi/2 - \alpha)}}$ et $\boxed{z_2 = e^{i(\pi/2 + \alpha)}}$

Si $z^n = \mathfrak{z}_1$ alors: $z_n = e^{i(\pi/2 - \alpha)}$

$\Rightarrow z_k = e^{i(\pi/2n - \alpha/n + 2k\pi/n)}$ $\quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$\Rightarrow z_k = e^{i\left(\frac{(4k+1)\pi - 2\alpha}{2n}\right)}$ $\quad k \in \{0, 1, \dots n-1\}$

Si $z^n = \mathfrak{z}_2$ alors: $z^n = e^{i(-\pi/2 + \alpha)}$

$\Rightarrow z'_k = e^{i(-\pi/2 + \alpha)}$

$\Rightarrow z'_k = e^{i\left(\frac{-\pi}{2n} + \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ $\quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$z'_k = e^{i\left(\frac{(4k-1)\pi + 2\alpha}{2n}\right)}$ $\quad k \in \{0, 1, \dots n-1\}$

Conclusion:

$S = \{z_k, z'_k\}$ avec: $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

Nom: Fatimetou Abdellahi Seyid.