Nom : toutou / Sidi Mahmoud

Exercice : 1

On considère les nombres complexes $a = \sqrt{2}(1+i)$, $b = \sqrt{3}+i$ et $c = a^3.b$

1.) Ecrire c sous forme algébrique.

2.) - Determiner le module et un argument de chacun des nombres a et b. En deduire le module et un argument de c.

3.) - Deduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.

Solution :

$a = \sqrt{2}(1+i)$; $b = \sqrt{3}+i$ et $c = a^3.b$

1). c sous forme algébrique :

$c = a^3.b = (\sqrt{2})^3(1+i)^3(\sqrt{3}+i)$

$c = 2\sqrt{2}(1+i)(1+i)^2(\sqrt{3}+i)$

$c = 2\sqrt{2}(1+i)(2i)(\sqrt{3}+i)$

$c = 2\sqrt{2}(2i-2)(\sqrt{3}+i)$

$c = 2\sqrt{2}(2i\sqrt{3}) = (2-2\sqrt{3}-2i)$

$c = 2\sqrt{2}(-2-2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3}-2)i$

donc $c = 2\sqrt{2}(-2-2\sqrt{3}) + 2\sqrt{2}(2\sqrt{3}-2)i$

2). Le module est l'argument de a et b

$|a| = \sqrt{2}.\sqrt{2} \Rightarrow |a| = 2$

$|b| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$|c| = |a|^3.|b| = 2^3 \times 2 = 2^4$

donc $\arg a = \frac{\pi}{4}$ et $\arg b = \pi/6$

$\arg c = \arg(a^3.b)$

$\arg a^3 + \arg b$

$= 3 \arg a + \arg b$

$3 \cdot \frac{\pi}{4} + \pi/6$

$= \frac{9\pi}{12} + \frac{2\pi}{12}$

$\Rightarrow \boxed{\arg c = \frac{11\pi}{12}}$

D'apres le forme algebrique de c, on a :

$|c| = 2^4 = 16$

$\arg c = \frac{11\pi}{12}$

$c = 2\sqrt{2}\,(-2 - 2\sqrt{3}) + 2\sqrt{2}\,(-2 + 2\sqrt{3})\,i$

3) les valeurs exactes de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$

- $\boxed{\cos \frac{11\pi}{12} = 2\sqrt{2}\left(\frac{-2 - 2\sqrt{3}}{16}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{4}\right)}$
- $\sin \frac{11\pi}{12} = 2\sqrt{2}\left(\frac{-2 + 2\sqrt{3}}{16}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{4}\right)$