Nom : Zeinebou / Mohamed
EL Houssein / Abdeljelil
7C ERRAJA

Exercice 16 :

Soit a un nombre complexe non nul. on pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Montrer que les points d'affixes a, aj ; aj^2 dans cet ordre sont les sommets d'un triangle équilatéral direct.

Solution :

Rappel : $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c'est une racine cubique de l'unité $j^3 = 1$

$1 + j^2 + j^3 = 0$ $\quad j^2 = \bar{j} = \frac{1}{j} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$; Or $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Soit A B C les points d'affixe respectives
a, aj ; aj^2

$$* \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{aj^2 - a}{aj - a} = \frac{a(j^2 - 1)}{a(j - 1)} = \frac{a(j-1)(j+1)}{aj - a} = j + 1$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \\ AC = AB \end{cases}$$

$\Rightarrow ABC$ équilatéral directe