Zeinebou / Mohamed
EL Houssein / Abd eljelil
7c ERRAJA

Exercice :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'equation suivante :

$$10z^4-(39-3i)z^3+60z^2-(39-3i)z+10=0$$

(on pose $Z = z+\frac{1}{z}$)

Solution :

* on constate que $z=0$ n'est pas solution de (E)

on divise par z^2

$$10z^2-(39-3i)z+60-(39-3i)\frac{1}{z}+10\times\frac{1}{z^2}=0$$

$$\Leftrightarrow 10\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-(39-3i)\left(z+\frac{1}{z}\right)+60=0$$

$$\Leftrightarrow 10\left(z^2+\frac{1}{z^2}+2-2\right)-(39-3i)\left(z+\frac{1}{z}\right)+60=0$$

$$\Leftrightarrow -20+10\left(z^2+\frac{1}{z^2}+2\right)-(39-3i)\left(z+\frac{1}{z}\right)+60=0$$

$$\Leftrightarrow 10\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-(39-3i)\left(z+\frac{1}{z}\right)+40=0$$

avec ce changement de variable on trouve l'équation (E') : $10Z^2-(39-3i)Z+40=0$

$$\Delta=(39-3i)^2-40\times40$$
$$=[3(13-i)]^2-1600$$
$$=9(13-i)^2-1600$$
$$=9(169-1-26i)-1600$$
$$=-88-234i \Leftrightarrow (9-13i)^2 \Rightarrow \delta=9-13i$$

$$Z_1 = \frac{39-3i+9-13i}{20} = \frac{48-16i}{20} = \frac{12-4i}{5}$$

$$Z_2 = \frac{39-3i-9+13i}{20} = \frac{30+10i}{20} = \frac{3+i}{2}$$

Alors $\boxed{Z_1 = \frac{12}{5} - \frac{4}{5}i \;;\; Z_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i}$ → Solution de (E')

* cherchons les solution associées de (E)

*Si $Z = Z_1$ alors $z + \frac{1}{z} = \frac{12-4i}{5} \Rightarrow 5z^2 - (12-4i)z + 5 = 0$

$\Rightarrow \Delta = (12-4i)^2 - 4(25)$

$= 144 - 16 - 96i - 100$

$= 28 - 96i = (8-6i)^2 \Rightarrow \delta_1 = 8-6i$

$$z_1 = \frac{12-4i+8-6i}{10} = \frac{20-10i}{10} = 2-i$$

$$z_2 = \frac{12-4i-8+6i}{10} = \frac{4+2i}{10} = \frac{2+i}{5}$$

$\Rightarrow$ on obtien $z_1 = 2-i$, $z_2 = \frac{2+i}{5}$

2 solution de (E)

* Si $Z = Z_2 \Rightarrow z + \frac{1}{z} = \frac{3+i}{2} \Rightarrow 2z^2 - (3+i)z + 2 = 0$

$\Delta = (3+i)^2 - 16 = -8+6i = (1+3i)^2 \Rightarrow \delta = 1+3i$

$z_3 = \frac{3+i+1+3i}{4}$; $z_4 = \frac{3+i-1-3i}{4}$ → on obtient $z_3 = 1+i$, $z_4 = \frac{1-i}{2}$

$\Rightarrow$ Ensemble de solution de (E)

$$\boxed{S = \left\{\left(2-i \;;\; \frac{2+i}{2} \;;\; 1+i \;;\; \frac{1-i}{2}\right)\right\}}$$